# Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper.

(Von Herrn *Helmholtz* in Heidelberg.)

Bei Gelegenheit gewisser Versuche wurde ich veranlasst, die Frage zu discutiren, in welcher Weise elektrische Ströme im Innern eines körperlich ausgedehnten Leiters zu fliessen beginnen. Ich suchte Aufschluss darüber aus der Theorie zu gewinnen. Die Bewegungsgleichungen der elektrischen Ströme von veränderlicher Intensität für Leiter von drei Dimensionen, welche sich aus Herrn *W. Weber*s sinnreicher Hypothese über das Wesen der elektrischen Fernwirkungen ergeben, sind von Herrn *G. Kirchhoff* *) entwickelt, und theils von ihm, theils von anderen Mathematikern mit Erfolg zur Erklärung einiger Beobachtungsthatsachen benutzt worden. Bei meinem Versuche, sie auf eine neue Aufgabe anzuwenden, ergaben sich physikalisch unzulässige Folgerungen, und die nähere Untersuchung überzeugte mich bald, dass der Grund davon in den Principien der Theorie stecke, dass nämlich nach den Folgerungen aus der *Weber*schen Theorie das Gleichgewicht der ruhenden Elektricität in einem leitenden Körper labil sei, und dass deshalb die darauf gegründete Theorie die Möglichkeit von elektrischen Strömungen anzeige, die zu immer grösser werdenden Werthen der Strömungsintensität und der elektrischen Dichtigkeit fortschritten.

Als ich dagegen versuchte, neue Bewegungsgleichungen zu bilden, bei denen ich statt des *Weber*schen Gesetzes für die Induction zweier Stromelemente auf einander das von Herrn *F. E. Neumann* **) (dem Vater) formulirte Gesetz zu Grunde legte, erhielt ich brauchbare Gleichungen, die für die ruhende Elektricität stabiles Gleichgewicht ergaben.

Bei diesem Widerstreit der Theorien schien es mir rathsam, möglichst wenig den Boden der Thatsachen zu verlassen und in der Theorie unbestimmt

*) *Poggendorff*s Annalen CII. pag. 529.

**) Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. Schriften der Berliner Akad. d. Wissensch. von 1845. — Besonders abgedruckt. Berlin, Reimer 1846. — Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme. Berlin, Reimer 1848. (Vorgelegt der Berliner Akademie 9. August 1847.)

zu lassen, was bisher nicht als durch Versuche entschieden angesehen werden konnte. Die Art, wie ich in diese Frage hineingezogen war, liess schon erkennen, dass die Untersuchung selbst eine gewisse Einengung in der Breite der zulässigen Annahmen herbeiführen würde; denn nur diejenigen Annahmen konnten beibehalten werden, die für die ruhende Elektricität stabiles Gleichgewicht ergeben. Zweitens schien zu hoffen, dass eine solche Theorie erkennen lassen würde, bei welchen Klassen von elektrischen Versuchen wir erwarten dürften, Erscheinungen zu beobachten, welche auf das wahre Gesetz der Fernwirkung zweier Stromelemente gegen einander einen Rückschluss erlauben würden, und umgekehrt, bei welchen anderen Klassen von Versuchen die bestehende Lücke unserer Kenntnisse keinen wesentlichen Einfluss auf ihre theoretische Erklärung und Ableitung habe. Diese Aussicht ist auch in einem gewissen Sinne erfüllt worden, indem sich zeigt, dass die mit den uns gegenwärtig zu Gebote stehenden Beobachtungsmitteln wahrzunehmenden Erscheinungen von jener Lücke in unseren Kenntnissen wahrscheinlich nirgends Kunde geben, und daher auch zunächst nichts zu deren Ausfüllung beitragen werden.

Die wesentlichste Lücke der Theorie in dem vorliegenden Gebiet bezieht sich auf die durch Aenderung der Stromintensität vorhandener elektrischer Ströme inducirten elektromotorischen Kräfte, sobald die inducirenden Ströme nicht vollständig geschlossen sind. Der charakteristische Unterschied zwischen einem System geschlossener und einem System ungeschlossener Ströme ist, dass in ersterem keine Veränderungen in der Dichtigkeit der freien Elektricität vorkommen, wohl aber in dem letzteren. Bisher kennen wir nun aus der Erfahrung mit hinreichender Genauigkeit die Gesetze der elektrodynamischen Anziehungen und die damit connexen Gesetze der inducirten elektromotorischen Kräfte nur für geschlossene Ströme, oder höchstens solche Fälle ungeschlossener Ströme (Leydener Flaschen), bei denen die Unterbrechungsstelle einflusslos auf die elektrodynamischen Wirkungen blieb.

Der Standpunkt der reinen Erfahrungsthatsachen ist gewahrt, wenn man nach *Ampères* Vorgang die elektrodynamischen Anziehungen darstellt als die Kräfte, welche zwei von den Stromkreisen begrenzte Flächen, mit magnetischen Doppelschichten bedeckt, auf einander ausüben; aber diese Art der Darstellung kann, wie ersichtlich, auf ungeschlossene Ströme nicht ausgedehnt werden.

Indessen liegt es in der Natur der Sache, dass man versuchen musste, die Gesammtwirkung zweier Stromkreise auf einander nicht von zwei imaginären durch sie begrenzten Flächen herzuleiten, sondern sie in die Wirkungen ihrer

einzelnen Elemente aufzulösen. Dabei zeigte sich, dass das Gesetz der Elementarwirkungen nicht vollständig und eindeutig aus dem der Gesammtwirkung bestimmt werden konnte. Schon *Ampère* hatte ein Gesetz für die anziehenden und abstossenden Kräfte gegeben, welche zwei Stromelemente auf einander ausüben. Herr *Grassmann* *) zeigte, dass dafür auch andere Kräfte eingeführt werden konnten, ohne das Resultat bei irgend einer Anwendung auf geschlossene Ströme zu verändern. Herr *F. E. Neumann* (Vater) leitete aus *Ampère*s Gesetzen für die Kräfte den Ausdruck für das Potential zweier Stromelemente ab, und sprach zuerst das daraus herfliessende Gesetz der Induction aus, im Wesentlichen gestützt auf die Erfahrungsregel, dass die durch Bewegung von Magneten oder Stromleitern inducirten Ströme dieser Bewegung immer entgegenwirken. Wenig später erschien der erste Abschnitt von Herrn *W. Weber*s „Elektrodynamischen Maassbestimmungen“, in denen er zuerst das unter seinem Namen bekannte Gesetz der elektrischen Fernwirkung aufstellte, welches alle bis dahin bekannten Wirkungen der Elektricität, die elektrostatischen, elektrodynamischen und inducirenden unter einen Gesichtspunkt zusammenfasste. Das daraus hergeleitete Inductionsgesetz war abweichend von dem *Neumann*schen Gesetze; aber es zeigte die darauf folgende Discussion, dass bei richtiger Anwendung des *Weber*schen Gesetzes, es für alle Fälle, wo der inducirende Strom geschlossen ist, genau dieselben Resultate giebt, wie das von Herrn *Neumann* aufgestellte Gesetz.

Da die von Herrn *C. Neumann* (Sohn) **) aufgestellte Hypothese über die elektrischen Fernwirkungen für geringere Strömungsgeschwindigkeiten der elektrischen Massen zum *Weber*schen Gesetze führt, so ist auch das daraus folgende Inductionsgesetz dasselbe, so lange nur die ersten Potenzen der Stromstärken zu berücksichtigen sind.

Ein andres Gesetz der Induction ist dagegen in den Arbeiten von Herrn *Cl. Maxwell* ***), wenn auch in verdeckter Form, enthalten, welches wiederum für geschlossene, aber nicht für ungeschlossene Ströme mit den beiden vorher erwähnten übereinstimmt.

Analytisch genommen beruht das bezeichnete Verhältniss dieser verschiedenen Gesetze darauf, dass die Differenzen zwischen den Werthen, die

---

*) Neue Theorie der Elektrodynamik in *Poggendorff*s Annalen LXIV. 1845.

**) Nachrichten von der Königl. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen. 16 Juni 1868.

***) London, Philosophical Transactions 1865. P. I. p. 459.

sie ergeben, alle auf die Form

$$B\frac{d^2 r}{ds.d\sigma}$$

gebracht werden können, wo $r$ die Entfernung der beiden Stromelemente $ds$ und $d\sigma$, und $B$ eine Constante bezeichnet. Diese Grösse liefert aber ein Integral vom Werthe Null, so oft sie über einen ganzen geschlossenen Stromkreis, sei es $s$ oder $\sigma$, integrirt wird. Ihr Einfluss verschwindet also aus dem Resultate, so oft dabei einer der beiden Stromkreise als geschlossen in die Rechnung eingeführt wird. Dasselbe würde übrigens der Fall sein, wenn $r$ auch nur irgend eine Function der Entfernung bedeutete. Im *ersten Paragraphen* der folgenden Untersuchung ist gezeigt worden, dass letzteres die allgemeinste Annahme ist, welche für das Potential zweier Stromelemente gewählt werden kann, wenn das Potential geschlossener Stromsysteme immer seinen richtigen Werth erhalten soll. Wenn man übrigens noch die Annahme hinzufügt, wie dies in den folgenden Untersuchungen geschehen ist, dass die Wirkung ungeschlossener Ströme in die Ferne keiner anderen Function der Entfernung proportional sei, als die aller anderen elektrischen Wirkungen, so ist unter $r$ in dem obigen Ausdrucke die Entfernung selbst zu verstehen.

Auf die hier gemachten Bemerkungen gestützt, habe ich meiner Untersuchung einen Ausdruck für das Potential zweier Stromelemente zu Grunde gelegt (§. 1, Gleichung (1.)), welcher eine Constante von unbekanntem Werthe (bezeichnet mit $k$) enthält, und in dieser Form die sämmtlichen bisher für dieses Potential aufgestellten Ausdrücke umschliesst. Aus meinem allgemeineren Ausdrucke ergiebt sich nämlich der von Herrn *F. E. Neumann* gebrauchte, wenn wir setzen $k=1$, dagegen der von Herrn *Cl. Maxwell,* wenn wir setzen $k=0$, und endlich der von Herrn *W. Weber* und *C. Neumann,* wenn wir setzen $k=-1$.

Die besondere Form der Herleitung des betreffenden Ausdrucks, wie sie im ersten Paragraphen durchgeführt ist, habe ich gewählt, um hervortreten zu lassen, dass unter Hinzunahme der schon erwähnten Hypothese dieser Ausdruck der allgemeinste ist, der den Bedingungen der Aufgabe und dem Gesetz von der Erhaltung der Kraft entspricht. Die weitere Annahme, dass auch die elektrodynamischen Wirkungen der ungeschlossenen Stromtheile ihrer Stromintensität einfach proportional sind, widerspricht gewissen Folgerungen der *Weber*schen Hypothese, die übrigens noch in keinem Falle durch die Erfahrung unterstützt worden sind. Wie es sich damit aber auch verhalten

mag, jedenfalls wird für geringere Stromstärken, die unterhalb einer gewissen Grenze bleiben, meine Annahme zulässig sein, so dass diese ungünstigsten Falls die Anwendbarkeit der von mir gezogenen Folgerungen nur in Bezug auf die zulässigen Stromstärken beschränkt.

Im *zweiten Paragraphen* sind die Werthe des elektrodynamischen Potentials für Ströme, die continuirlich im Raume verbreitet sind, entwickelt, und zum weiteren Gebrauche umgeformt. Die Art der Umformung und die analytischen Kunstgriffe, welche dabei angewendet sind, sind im Wesentlichen dieselben, welche schon Herr *Kirchhoff* für denselben Zweck, aber auf einen etwas anders gestalteten Ausdruck angewendet hatte.

Dann sind im *dritten Paragraphen* die Bewegungsgleichungen der Elektricität aufgestellt, und auf ein System von Differentialgleichungen gebracht worden. Letztere sind im Innern eines Leiters von gleichmässiger Beschaffenheit dieselben, wie für verschwindend kleine Bewegungen in einem der Reibung unterworfenen Gase, nur mit anderen Grenzbedingungen. Dabei entsprechen aber die elektromotorischen Kräfte den Geschwindigkeiten des Gases, die elektrostatische Potentialfunction den Druck- und Dichtigkeitsänderungen des Gases.

Im *vierten Paragraphen* folgt dann die Untersuchung, ob durch die aufgestellten Gleichungen der Verlauf der Bewegung eindeutig bestimmt sei. Dies ist der Fall, wenn die Constante $k$ nicht negativ ist. Wenn sie aber negativ ist, ergiebt sich, dass der Werth der durch die elektrische Bewegung repräsentirten Arbeit negativ, d. h. kleiner als im Ruhezustande werden kann, was das Zeichen eines *labilen Gleichgewichts* der Elektricität im Ruhezustande ist. In der That wird ganz allgemein für Leiter jeder Form nachgewiesen, dass, wenn die genannte Arbeitsgrösse erst einmal einen negativen Werth hat, die Bewegung, sich selbst überlassen, fortdauernd anschwillt und zu unendlichen Geschwindigkeiten und Dichtigkeiten der Elektricität führt*).

Die Frage konnte noch sein, ob solche Bewegungen, die nach der labilen Seite des elektrischen Gleichgewichts hin ausschlagen, durch die bekannten äusseren Einwirkungen, welche uns bei wirklichen Versuchen zu Gebote stehen, hervorgerufen werden könnten, falls die Constante $k$ wirklich

*) Aus mündlichen Mittheilungen meines Collegen *Kirchhoff* weiss ich, dass er schon vor mir gefunden hatte, dass gewisse elektrische Bewegungen in der Kugel nach den von ihm aus der *Weber*schen Hypothese abgeleiteten Gleichungen diese Eigenschaft haben.

einen negativen Werth hätte. Es wird im *fünften Paragraphen* an einem Beispiel, nämlich der Kugel, gezeigt werden, dass dies wirklich der Fall ist. Es muss dies nachweisbar im Allgemeinen geschehen, so oft elektrische Bewegungen in einer homogenen leitenden Kugel dadurch hervorgerufen werden, dass man ihr einen elektrisirten Körper nähert, und ihn dann wieder entfernt, gewisse besondere Bewegungsarten des elektrisirten Körpers ausgenommen.

Daraus geht hervor, dass *die Annahme eines negativen Werthes für die Constante $k$, wie sie im Weberschen Inductionsgesetze gemacht ist, unzulässig ist.*

Es kann auffallen, dass in den bisherigen Arbeiten über dieses Thema, welche alle das von Herrn *Kirchhoff* *) aus dem *Weber*schen Inductionsgesetz hergeleitete System von Gleichungen benutzt haben, diese Unzulänglichkeit nicht zum Vorschein gekommen ist. In dieser Beziehung ist zu bemerken, dass Herr *Kirchhoff* selbst Anwendungen der von ihm gefundenen Gleichungen nur auf unendlich dünne Drähte gemacht hat, und es wird in §. 7 gezeigt werden, dass wenn nur solche Oscillationen der Elektricität als stattfindend vorausgesetzt werden, gegen deren Wellenlänge der Durchmesser des Drahtes verschwindend klein ist, der Einfluss der Constante $k$ ebenfalls verschwindet, so dass Herrn *Kirchhoffs* Resultate durch die meinigen nicht beeinträchtigt werden.

Dann hat Herr *Jochmann* **) dieselben Gleichungen angewendet zur Bestimmung der Ströme in einem rotirenden und der Einwirkung eines Magneten ausgesetzten Leiter. Solche Ströme sind in einer rotirenden Kugel immer geschlossene, so dass der Einfluss der Constante $k$ verschwindet, und in einem Leiter von andrer Form (Scheibe) hat Herr *Jochmann* die Einwirkung der theilweis ungeschlossenen inducirten Ströme auf einander ausser Rechnung gelassen.

Endlich hat Herr *Lorberg* ***) die unter Einwirkung beliebiger periodischer äusserer Kräfte in einer homogenen leitenden Kugel vor sich gehenden periodischen Bewegungen der Elektricität untersucht, und es ist ihm gelungen, das ziemlich complicirte System der Differentialgleichungen für diesen Fall vollständig zu integriren. Seine Arbeit zeigt, dass periodische endlich bleibende

---

*) *Poggendorffs* Annalen CII, p. 529.
**) Dieses Journal Bd. LXIII, 158—178; 329—331.
***) Dieses Journal Bd. LXXI, p. 53.

Bewegungen der Elektricität in einer Kugel unter Einfluss periodischer Kräfte vor sich gehen *können,* aber nicht, dass solche Bewegungen durch solche Kräfte aus dem Zustand der Ruhe hervorgerufen werden. Im Gegentheil die Vergleichung mit den von mir aufgestellten Integralen der Differentialgleichungen zeigt, dass dauernd endliche Bewegungen unter zeitweiliger Einwirkung äusserer Kräfte in der Kugel nur möglich sind, wenn schon vorher eine schwellende Bewegung der Elektricität bestand, welche durch Einwirkung der äusseren Kräfte in eine abschwellende verwandelt worden ist.

Die von den Herren *W. Weber* und *Lorberg* hinzugefügte Annahme, dass die elektrischen Flüssigkeiten träge Masse und Beharrungsvermögen hätten, ändert nichts Wesentliches an diesen Ergebnissen.

Auch die von Herrn *W. Weber* *) angedeutete Annahme, dass in elektrisch geladenen Theilen des Leiters sich positive und negative Elektricität mit verschiedener Geschwindigkeit bewegen könnten, wobei dann die Fernwirkungen seiner Hypothese gemäss nicht einfach der Intensität der Strömung proportional, sondern auch von dem Producte dieser Intensität und der elektrischen Dichtigkeit abhängig werden würden, beseitigt die Schwierigkeit nicht, da die genannte Annahme nur Glieder höherer Dimensionen hinzufügen würde, die unzulässigen Folgerungen aber schon aus den Gliedern erster Dimension herfliessen, und sich daher bei den allerschwächsten Strömen schon geltend machen müssen.

Es scheint mir vielmehr, dass die hier zu Tage kommende Unzulänglichkeit des *Weber*schen Gesetzes in der Natur desselben tief begründet ist. Dieses Gesetz fügt sich allerdings in so fern dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft ein, als es keinen Kreisprocess zulässt, der Arbeit aus Nichts erzeugte. Aber es widerspricht in so fern, als zwei elektrische Theilchen, die sich nach diesem Gesetze bewegen und mit endlicher Geschwindigkeit beginnen, in endlicher Entfernung von einander unendliche lebendige Kraft erreichen und also eine unendlich grosse Arbeit leisten können.

Es sei $m$ die Masse, welche sich mit dem elektrischen Theilchen $e$ bewegt; dieses sei der abstossenden Kraft des gleichartigen Theilchens $e'$ unterworfen; die Bewegung geschehe in Richtung der Entfernung $r$ beider Theilchen. Nach dem *Weber*schen Gesetze ist:

$$m \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{e . e'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2} \cdot \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c^2} \cdot \frac{d^2 r}{dt^2}\right].$$

*) Elektrodynamische Maassbestimmungen Heft I. p. 160—164.

Wir multipliciren mit $\frac{dr}{dt}$ und integriren:

$$\frac{m}{2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = C - \frac{e.e'}{r} + \frac{e.e'}{r.c^2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

oder

$$\frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{C-\frac{e.e'}{r}}{\frac{1}{2}m.c^2-\frac{e.e'}{r}}.$$

Ist $\frac{e.e'}{r} > \frac{1}{2}mc^2 > C$, so ist $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ positiv und grösser als $c^2$, also $\frac{dr}{dt}$ reell. Ist letzteres selbst positiv, so wird $r$ wachsen, bis $\frac{e.e'}{r} = \frac{1}{2}m.c^2$, dann wird $\frac{dr}{dt}$ unendlich gross.

Dasselbe wird geschehen, wenn im Anfange $C > \frac{1}{2}m.c^2 > \frac{e.e'}{r}$ und $\frac{dr}{dt}$ negativ ist.

Dies könnte also schon im einfachsten denkbaren Falle, bei der Bewegung zweier isolirter elektrischer Theilchen geschehen. Die Resultate unseres fünften Paragraphen zeigen, dass dasselbe auch bei wirklich ausführbaren Versuchen müsste vorkommen können, wenn das *Weber*sche Gesetz in Wirklichkeit das Grundgesetz der elektrischen Fernwirkungen wäre *).

Im *sechsten Paragraphen* folgt dann eine Untersuchung darüber, ob und bei was für Versuchen ein wahrnehmbarer Einfluss der neu eingeführten Constante $k$ etwa erwartet werden könne. Bilden wir die Gleichungen für eine radial von einem Centrum in einem unendlich ausgedehnten leitenden Medium sich ausbreitende elektrische Bewegung, so zeigt sich, dass sich in einem solchen Falle die Elektricität in longitudinalen Wellen ausbreiten kann, die aber je nach der Schwingungsdauer und dem Leitungswiderstand des Medium

*) Das Potential zweier elektrischer Theilchen ist nach *Weber*

$$\frac{e.e'}{r}\left[1-\frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Fügte man diesem Ausdrucke noch ein Glied hinzu, nämlich

$$-\frac{1+k}{2}\cdot\frac{e.e'}{c^2}\cdot\frac{d^2r}{dt^2},$$

so würde man das in Gleichung (1.) §. I gegebene Potential zweier Stromelemente erhalten, und wenn $k$ positiv, stabiles Gleichgewicht der Elektricität. Diese Annahme würde aber in den Ausdruck der Kraft ein Glied mit $\frac{d^3r}{dt^3}$ bringen, und ich wage deshalb keineswegs sie zu empfehlen.

einem verschiedenen Grade von Dämpfung unterworfen sind. Ist die Dämpfung gering, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit solcher longitudinalen Wellen nach unserer Bezeichnung gleich $\frac{1}{A\sqrt{k}}$, wobei der Factor $\frac{1}{A}$ nach Herrn *Webers* Bezeichnung gleich $\frac{c}{\sqrt{2}}$ ist, welche letztere Grösse, wie schon Herr *Kirchhoff* gefunden hat, der Lichtgeschwindigkeit ausserordentlich nahe gleich ist und als Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen in einem sehr gut leitenden Drahte von ihm nachgewiesen wurde.

Nach Herrn *Maxwells* Annahme $k=0$ würde die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen elektrischen Wellen in einem Leiter unendlich gross werden, das heisst, die strömende Elektricität würde sich wie ein incompressibles Fluidum verhalten. Es bringt diese Annahme eine sehr beträchtliche Vereinfachung der analytischen Schwierigkeiten hervor, die bei den hierher gehörigen Aufgaben vorliegen, weil bei diesem Werthe von $k$ nie freie Elektricität in das Innere eines homogenen Leiters eintritt, wenn sie nicht von Anfang an darin vorhanden war. Es wird dabei eine der Grundgleichungen der Aufgabe ((II.), beziehlich (II$^a$.) des §. 3) frei von dem Differentialquotienten nach der Zeit, also ihre Integration nach der Zeit unnöthig.

Nach Herrn *F. E. Neumanns* Annahme $k=1$, wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen gleich der des Lichtes. Wäre $k$ eine nicht sehr grosse positive Zahl, so würde die genannte Fortpflanzungsgeschwindigkeit doch zu der des Lichtes immer noch in einem endlichen Verhältniss stehen. Nach *Fouriers* Satz kann man sich jede elektrische Bewegung zerlegt denken in eine Summe superponirter einfacher Oscillationen. So lange nun die Wellenlängen der Longitudinalwellen der mit den gegebenen Beobachtungsmitteln wahrzunehmenden Oscillationen so gross sind, dass die Dimensionen der leitenden Körper dagegen verschwinden, so lange kann auch die Bewegung keinen merklichen Einfluss der Constante $k$ zeigen, und kann, selbst wenn $k$ von Null verschieden ist, mit hinreichender Annäherung gefunden werden, auch wenn wir zur Erleichterung der Rechnung $k=0$ setzen.

Der einzige praktisch vorkommende Fall eines Leiters von sehr erheblicher Erstreckung, wenigstens nach einer Richtung hin, ist der eines langen Drahtes. Ich habe deshalb im *siebenten Paragraphen* den Ablauf elektrischer Wellen in einem unendlichen Cylinder von kreisförmiger Basis so weit untersucht, als für den vorliegenden Zweck nöthig war. Ist die Wellenlänge sehr gross gegen den Durchmesser, so afficirt die Constante $k$ erst die kleinen

Glieder höherer Ordnung. Die der ersten Ordnung finden sich übereinstimmend, wie in Herrn *Kirchhoffs* Analyse.

Es geht daraus hervor, dass wir uns bei den elektrischen Versuchen der von der Constante $k$ abhängigen Geschwindigkeit der elektrischen Longitudinalwellen gegenüber in einer ähnlichen Lage befinden, wie in der Optik der Lichtgeschwindigkeit gegenüber. Bei unseren Laboratoriumsversuchen werden wir nicht leicht in die Lage kommen, die eine oder die andere berücksichtigen zu müssen, oder ihren Werth bestimmen zu können, wenn wir nicht Mittel anwenden, ganz ungewöhnlich feine Zeitunterschiede wahrnehmbar zu machen, wie dies für die physikalische Messung der Lichtgeschwindigkeit geschehen ist.

In den bisher besprochenen ersten sieben Paragraphen der vorliegenden Arbeit sind die elektrostatischen und elektrodynamischen Wirkungen als reine Wirkungen in die Ferne behandelt worden, welche die zwischen liegenden isolirenden Medien nicht afficiren und von ihnen nicht afficirt werden; es war dies, bisher wenigstens, die geläufige Betrachtungsweise der meisten mathematischen Physiker, wenigstens des Continents. Indessen wissen wir jetzt, namentlich durch *Faradays* Entdeckungen, dass bei weitem die meisten körperlichen Medien magnetisirbar sind, und dass ein der magnetischen Polarisation ähnlicher Zustand von diëlektrischer Polarisation in den elektrischen Isolatoren vorkommt. Die einfachste Theorie des Diamagnetismus wird gewonnen, wenn wir auch den den Weltraum füllenden Lichtäther als magnetisirbar voraussetzen, und ist dies einmal angenommen, so liegt es nicht fern, ihn auch als *Diëlektricum,* in *Faradays* Sinne, zu betrachten. Für die Wirkungen ruhender oder langsam bewegter Elektricität, ruhender oder langsam bewegter Magnetismen ergiebt eine solche Hypothese, welche das den Weltraum füllende Medium selbst als diëlektrisch und magnetisirbar betrachtet, durchaus dieselben Resultate, wie die, welche den Raum als absolut wirkungslos ansieht. *Faradays* Theorie freilich, welcher Herr *Cl. Maxwell* in dem oben citirten Aufsatze ihren mathematischen Ausdruck gegeben hat, geht weiter, indem sie die Fernkräfte ganz leugnet, und dafür nur die durch contiguirlich fortschreitende Polarisation des Medium fortgepflanzten Wirkungen setzt. Beide Theorien sind einander in gewissem Sinne entgegengesetzt, da nach der von *Poisson* ausgegangenen Theorie der magnetischen Induction, welcher die Theorie der diëlektrischen Polarisation der Isolatoren ganz entsprechend durchgeführt werden kann, die Fernwirkung durch die Polarisation verkleinert, nach Herrn *Maxwells*

Theorie dagegen die Fernwirkung durch die Polarisation des Medium geradezu ersetzt wird.

Aus Herrn *Maxwells* Theorie hat sich nun das merkwürdige Resultat ergeben, dass elektrische Störungen in isolirenden Diëlektricis sich in Transversalwellen verbreiten, für deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit sich im Luftraume die Grösse $\frac{1}{A}$, das heisst die Lichtgeschwindigkeit, ergiebt.

Bei der hervorragenden Bedeutung, welche dieses Resultat für die weitere Entwickelung der Physik haben könnte, und da die Frage über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wirkungen in neuerer Zeit mehrfach angeregt worden ist, schien es mir wichtig, auch noch zu untersuchen, was das von mir verallgemeinerte Inductionsgesetz für den Fall ergebe, dass magnetisirbare und diëlektrisch polarisirbare Medien vorhanden seien. Dies ist im *achten Paragraphen* geschehen.

Diese Untersuchung ergiebt Folgendes:

1) In diëlektrischen Isolatoren, selbst wenn sie nicht magnetisirbar sind, können sich elektrische Bewegungen in transversal und longitudinal oscillirenden Wellen fortpflanzen.

2) Die Geschwindigkeit der transversalen Wellen im Luftraum (beziehlich Weltraum) ergiebt sich in der Rechnung als desto geringer, je grösser seine diëlektrische Polarisirungsfähigkeit angenommen wird. Ist diese Null, so ist die genannte Geschwindigkeit unendlich; ist die Polarisirungsfähigkeit sehr gross, so findet man die Geschwindigkeit der transversalen Wellen, wie bei Herrn *Maxwell*, gleich der Lichtgeschwindigkeit.

3) Die Geschwindigkeit der longitudinalen Wellen im Luftraume findet sich gleich dem Product aus der der transversalen Wellen mit dem Factor $\frac{1}{\sqrt{k}}$ und einer von der magnetischen Beschaffenheit des Luftraums abhängigen Constanten. In Herrn *Maxwells* Theorie ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen elektrischen Wellen als unendlich vorausgesetzt, was dem Werthe $k=0$ entspricht; das heisst, longitudinale Wellen kommen gar nicht zu Stande.

4) Die Geschwindigkeit der transversalen und der elektrischen longitudinalen Wellen in andern Isolatoren wird desto kleiner, je mehr ihre elektrische und magnetische Polarisirbarkeit die des Luftraums übertrifft. In den Leitern der Elektricität pflanzen sich die Wellen unter allmäliger Schwächung durch Absorption fort. Für die Transversalwellen stimmt auch dies mit Herrn *Maxwells* Theorie.

5) Wenn der Isolator, in welchem sich transversale elektrische Wellen

fortpflanzen magnetisch polarisirbar ist, und die elektrischen Oscillationen parallel einer durch die Fortpflanzungsrichtung gelegten Ebene geschehen, so finden magnetische transversale Oscillationen senkrecht zu dieser Ebene statt, die mit derselben Geschwindigkeit fortgepflanzt werden. Für magnetische longitudinale Oscillationen ergiebt sich in solchen Medien unendliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Es ergiebt sich also aus diesen Untersuchungen, dass die merkwürdige Analogie zwischen den Bewegungen der Elektricität in einem Diëlektricum und denen des Lichtäthers *) nicht von der besonderen Form von Herrn *Maxwells* Hypothesen abhängt, sondern sich in wesentlich ähnlicher Weise auch ergiebt, wenn wir die ältere Ansicht über die elektrischen Fernwirkungen beibehalten.

Zu der bisher nicht bestimmbaren Constanten $k$ unserer Untersuchungen kommt also noch eine zweite, nämlich die aus den bisherigen Versuchen ebenfalls nicht bestimmbare diëlektrische Constante des Luftraums, oder die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Transversalwellen im Luftraume.

## §. 1.

### Die allgemeinere Form des Inductionsgesetzes.

Das von Herrn *F. E. Neumann* aufgestellte Inductionsgesetz für die Ströme, welche durch Bewegung von Magneten oder von Leitern constanter geschlossener Ströme inducirt werden, ist der unmittelbare Ausdruck der Erfahrung, wonach die durch Bewegung inducirten Ströme dieser Bewegung immer entgegenwirken, und wonach die elektromotorische Gesammtkraft des durch eine gewisse Bewegung erzeugten Integralstroms unabhängig von der Schnelligkeit dieser Bewegung ist. Um den mathematischen Ausdruck hierfür zu geben, mussten

*) Diese Analogie ist noch in einer andern sehr wichtigen Beziehung vorhanden, welche Herr *Maxwell* nicht berührt hat. Man hat den mechanischen Zustand des Lichtäthers in durchsichtigen Medien bisher dem der festen elastischen Körper gleich gesetzt. Diese Annahme ergiebt aber für die Grenze zweier durchsichtiger Medien andere Grenzbedingungen, als man braucht, um die Refraction und Reflexion des Lichts an dieser Grenze zu erklären, so dass hier in der theoretischen Optik ein ungelöster Widerspruch bestanden hat. Die Theorie der elektrischen Oscillationen (Gleichungen ($20^c$.) bis ($20^e$.) unten) ergiebt aber nicht bloss im Innern eines gleichartigen isolirenden Medium, sondern auch an der Grenze von zwei solchen Medien, dieselben Gesetze der Fortpflanzung, der Refraction und Reflexion der Wellen, wie wir sie beim Lichte thatsächlich finden, vorausgesetzt dass man entweder die magnetische oder die diëlektrische Polarisationsfähigkeit beider Medien gleich und letztere sehr gross setzt. Von der bezeichneten Alternative hängt es ab, ob die elektrischen oder magnetischen Oscillationen eines polarisirten Strahls in der Polarisationsebene geschehen.

die Kräfte, welche zwei durchströmte Leiter, oder ein solcher und ein Magnet, auf einander ausüben, auf die Differentialquotienten einer Kräftefunction, oder wie diese hier genannt wurde, eines Potentials zurückgeführt werden.

Dies war zunächst unmittelbar möglich mittels des *Ampère*schen Satzes, wonach die Fernwirkung eines geschlossenen Stromes auf Magnete oder andere Ströme gleich ist derjenigen einer vom Strome begrenzten Fläche, die mit einer magnetischen Doppelschicht bedeckt ist, deren Moment in allen gleich grossen Flächenstücken das gleiche und der Stromstärke proportional ist.

Das Potential eines Stromes auf einen andern oder auf einen Magneten, im *Neumann*schen Sinne, kann definirt werden als die Quantität mechanischer Arbeit, welche durch die elektrodynamischen oder elektromagnetischen Abstossungskräfte geleistet wird, wenn die beiden Ströme, beziehlich Strom und Magnet, bei unveränderter Stromstärke und Magnetisirung in unendliche Entfernung von einander übergeführt werden.

Das von Herrn *Neumann* formulirte Gesetz sagt dem entsprechend aus, dass die inducirte elektromotorische Kraft, welche in dem Stromleiter $s$ durch Bewegung anderer constanter Ströme oder Magneten hervorgebracht wird, proportional ist der auf die Zeiteinheit berechneten Zunahme des Potentials jener Ströme und Magnete, genommen auf den von der Stromeinheit durchströmten Leiter $s$.

Ich habe dann gezeigt, dass, wenigstens bei der Induction durch Bewegung eines unveränderlichen und die Elektricität nicht leitenden Magneten, aus dem Gesetze der Erhaltung der Kraft folgt, dass die genannte elektromotorische Kraft der genannten Aenderung des Potentials nicht nur proportional, sondern gleich sein muss, wenn man die Einheit des Widerstands so wählt, dass die Einheit des Stroms in derselben während der Zeiteinheit eine der Einheit der Arbeit äquivalente Wärmemenge erzeugt.

Weitere Erfahrungen zeigten, dass die elektromotorische Kraft des Integralstroms ebenfalls den gleichen Werth hat, wenn der inducirende Strom im unbewegten Leiter geschlossen wird, als wenn der Leiter mit dem schon bestehenden Strome aus unendlicher Ferne her schnell in die betreffende Lage geführt wird. Es folgt daraus, dass es für die inducirende Wirkung einerlei ist, ob die Zunahme des Potentials durch Bewegung oder Verstärkung des Stroms erfolgt.

Die Induction, welche ein Strom auf sich selbst ausübt, und welche in seiner eigenen Bahn den Extracurrent der Schliessung und Oeffnung her-

vorruft, konnte unter dasselbe Gesetz gebracht werden, und ich selbst habe durch den Versuch nachgewiesen, dass die Stärke auch dieser verhältnissmässig schnell verlaufenden Stromschwankungen, wenigstens bei vielgewundenen gut leitenden Spiralen, einfach durch das *Neumann*sche Gesetz geregelt wird*). Für einen einzelnen Stromkreis, dessen Widerstand $W$ ist und in welchem die constante elektromotorische Kraft $A$ wirkt, ist also nach dem *Ohm*schen Gesetze

$$JW = A + 2P \cdot \frac{dJ}{dt},$$

worin $P$ das Potential des von der Stromeinheit durchlaufenen Stromkreises auf sich selbst bezogen bedeutet, und zwar so berechnet, dass die Wirkung aller Elemente $a$ des Stromes auf alle diejenigen Elemente $b$, die noch nicht als $a$ in die Summe aufgenommen sind, addirt wird. So berechnet ist das Potential das Maass der mechanischen Arbeit, die bei Formveränderungen des Stroms geleistet werden kann. Bei den Inductionswirkungen kommt jedes Stromelement als inducirendes und inducirtes in Betracht, und kehrt deshalb jede Combination aus je zweien zwei Mal wieder. Daher der Factor 2 vor P.

Aus jener Gleichung folgt die Gleichung der Erhaltung der Kraft:

$$J^2 W dt - AJdt = \frac{d}{dt}[PJ^2] \, . \, dt.$$

Nun ist $AJdt$ die Arbeit (chemische in den hydroëlektrischen Ketten), welche während der Zeit $dt$, um den Strom zu treiben, aufgebraucht ist; $J^2 W dt$ ist der Theil dieser Arbeit, der durch Wärmeentwickelung in der Stromleitung vernichtet ist. Daraus folgt, dass die gleichzeitige Zunahme der Grösse $-PJ^2$ einer Arbeitsleistung entspricht, welche die den Strom treibenden Kräfte verrichtet haben, während der Strom ansteigt. Umgekehrt, wenn die elektromotorische Kraft $A$ beseitigt wird, und der Strom allmälig auf Null sinkt in der übrigens geschlossen bleibenden Leitung, so wird durch den Extracurrent die der Grösse $-PJ^2$ äquivalente Wärmemenge wiedererzeugt.

Es ist hierbei zu bemerken, dass die Grösse $P$ nach Herrn *Neumanns* Definition nothwendig negativ ist, und daher $-PJ^2$ positiv. Dieser Satz, dass das negativ genommene Gesammtpotential sämmtlicher vorhandener Ströme auf einander dem durch das Bestehen dieser Ströme repräsentirten Arbeitsäquivalent

---

*) Ueber die Dauer und den Verlauf der durch Stromesschwankungen inducirten Ströme. *Poggendorffs* Annalen LXXXIII, p. 505. 1851.

gleich ist, gilt ganz allgemein für beliebige Systeme geschlossener Ströme. Es wird nicht nöthig sein, den Beweis dafür an dieser Stelle auszuführen, da in §. 4, Gleichung ($5^a$.) der Beweis ganz allgemein (auch ungeschlossene Ströme nach der neuen Inductionsformel umfassend) gegeben werden wird.

Daraus folgt also, wie schon die Herren *W. Thomson* und *Cl. Maxwell* hervorgehoben haben, dass die Strömung der Elektricität, ähnlich der lebendigen Kraft einer bewegten trägen Masse, einer Arbeit äquivalent ist. Nur tritt der Unterschied ein, dass dies Arbeitsäquivalent der elektrischen Strömung in einer complicirten Weise von den räumlichen Verhältnissen der vorhandenen Ströme abhängt.

Wenn zwei geschlossene Stromkreise $s$ und $\sigma$ mit den Stromintensitäten $i$ und $j$ vorhanden sind, ist das Potential von der Form

$$P_{s,s}\,.\,i^2 + P_{s,\sigma}\,.\,i\,.\,j + P_{\sigma,\sigma}\,.\,j^2.$$

Darin sind $P_{s,s}$ und $P_{\sigma,\sigma}$ die Potentiale der Kreise $s$ und $\sigma$ auf sich selbst, $P_{s,\sigma}$ das Potential der beiden auf einander, alle für die Stromeinheit in $s$ und $\sigma$ berechnet.

Die Grösse $P_{s,\sigma}.i.j$ ist also nach ihrer ursprünglich von Herrn *F. E. Neumann* ihr gegebenen Bedeutung die Grösse mechanischer Arbeit, welche bei constanten Strömen die beiden Leiter leisten können, wenn sie in unendliche Entfernung von einander gebracht werden. Ihre negativen Differentialquotienten, für irgend eine Lagenänderung genommen, sind die elektrodynamischen Kräfte, welche diese Lagenänderung hervorzubringen streben. Dass für geschlossene Ströme diese Kräfte auf ein Potential zurückgeführt werden können, ist durch die Ergebnisse der Versuche erwiesen. Für ungeschlossene Ströme könnte dies zweifelhaft erscheinen.

Eben deshalb ist es wichtig, dass die Grösse $-P_{s,\sigma}.i.j$ noch die zweite von den Bewegungen der Stromleiter unabhängige Bedeutung hat. Sie ist derjenige Theil des vorhandenen Arbeitsäquivalentes, der von dem gleichzeitigen Vorhandensein der beiden Ströme $i$ und $j$ herrührt. Eine Function dieser Art muss offenbar auch für eine einzelne oder zwei neben einander bestehende ungeschlossene Strömungen existiren. Es muss sich der Werth des Arbeitsäquivalents ihrer elektrischen Bewegung angeben lassen.

Wenn wir mit $D_s$ und $D_\sigma$ die Elemente der Länge zweier linearen Leiter $s$ und $\sigma$ bezeichnen, mit $(D_s, D_\sigma)$ den Winkel, welchen die Richtungen beider mit einander machen, mit $r$ ihre Entfernung, mit $i$ die Intensität des Stromes in $s$, mit $j$ die in $\sigma$, so ist nach Herrn *F. E. Neumann* das Potential der

beiden Stromelemente auf einander gleich

$$-A^2 . i . j \cdot \frac{\cos(D_s, D_\sigma)}{r} \cdot D_s . D_\sigma .$$

Darin ist $A^2$ eine Constante, deren Grösse von dem zur Messung der Stromstärke gebrauchten Maasse abhängt. Herr *Neumann* hat *Ampères* elektrodynamische Stromeinheiten gebraucht, und demzufolge $A^2 = \frac{1}{2}$ gesetzt. Wir wollen im Folgenden elektrostatisches Strommaass gebrauchen, das heisst als Einheit der Stromstärke diejenige ansehen, wobei die gesammte Quantität Elektricität (algebraisch summirt), welche durch einen Querschnitt des Leiters in der Zeiteinheit fliesst, gleich Eins ist *). Als Einheit der Elektricität bezeichnen wir mit *Gauss* diejenige, welche ruhend in der Einheit der Entfernung die gleiche ruhende Masse mit der Einheit der Kraft abstösst. Dann ist nach den Messungen der Herren *W. Weber* und *R. Kohlrausch* zu setzen

$$\frac{1}{A} = 310740 . 10^6 \, \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunden}},$$

oder $\frac{1}{A}$ ist eine Geschwindigkeit von 41928 geographischen Meilen in der Secunde, eine Geschwindigkeit, welche der des Lichtes gleich kommt.

Der obige Ausdruck für das Potential zweier Stromelemente, sowie auch der von *Ampère* für die Anziehungskraft zweier Stromelemente gegebene Ausdruck, aus dem jener Werth des Potentials abgeleitet wurde, ist selbst hergeleitet aus und geprüft worden an Beobachtungsthatsachen, welche sich auf geschlossene Ströme beziehen **). Er ist aber bisher nicht durch die Erfahrung als gültig erwiesen für solche Ströme, welche nicht als ein System überall geschlossener Stromcurven angesehen werden können, deren jede einzelne in ihrer ganzen Länge constante Intensität hat, und in der That ergeben die Theorien der Herren *W. Weber* und *Cl. Maxwell* andere abweichende Ausdrücke für das Potential zweier Stromelemente, obgleich ihre Ergebnisse für alle elektrodynamischen und inducirenden Wirkungen geschlossener Ströme durchaus mit der *Neumann*schen Theorie zusammenstimmen.

---

*) Diese Bestimmung ist übereinstimmend mit derjenigen, welche die Commission der British Association für Bestimmung des Widerstandsmaasses gewählt hat. Herrn *W. Webers* mechanische Stromeinheit ist doppelt so gross, weil er verlangt, dass die Einheit der positiven Elektricität allein genommen, in der Zeiteinheit den Querschnitt durchfliesse.

**) Ströme mit Gleitstellen können immer als geschlossene Ströme von veränderlicher Form betrachtet werden. Entladungsströme von Leydener Flaschen sind bisher auf die elektrodynamischen Wirkungen der Unterbrechungsstelle zwischen den beiden Belegen nicht untersucht worden.

Wir haben zunächst zu untersuchen, welches die allgemeinste Form des Ausdrucks für das Potential der einzelnen Stromelemente sei, die in allen den Fällen, wo einer der Ströme geschlossen ist, den gleichen Werth, wie die *Neumann*sche Formel ergiebt. Zu dem Ende stellen wir folgende Ueberlegung an.

Es gehe der Stromleiter $s$ vom Punkte $a$ zum Punkte $b$, und der in ihm fliessende Strom habe die Intensität $i$, ferner gehe der Stromleiter $\sigma$ vom Punkte $c$ zum Punkte $d$, und der Strom in ihm habe die Intensität $j$. Es sei $Q$ der wirkliche Werth des Potentials dieser beiden Stromleiter und $P$ der nach *Neumanns* Formel berechnete Werth. Wenn wir nun statt des Stromleiters $s$ einen andern $s_1$ mit denselben Endpunkten setzen, und in ihm dieselbe Stromintensität $i$ von $a$ nach $b$ fliessen lassen, mögen die entsprechenden Werthe von $Q$ und von $P$ beziehlich mit $Q_1$ und $P_1$ bezeichnet werden. Lassen wir nun die beiden Stromleiter $s$ und $s_1$ zugleich bestehen, aber so, dass die Stromintensität in letzterem gleich $-i$ gemacht wird, und daher sein Potential auf $\sigma$ den negativen Werth $-Q_1$ erhält, so bilden $i$ in $s$ und $-i$ in $s_1$ einen geschlossenen Strom, dessen Potential $Q-Q_1$ ist. Dieses ist aber auch durch die *Neumann*sche Form vollständig gegeben, also:

$$Q-Q_1 = P-P_1.$$

Setzen wir also

$$Q = P+F,$$

so ist auch

$$Q_1 = P_1+F$$

und die Grösse $F$ überhaupt durchaus unabhängig von der Form, Länge, Lage, Richtung des Stromleiters $s$ zwischen $a$ und $b$, wenn nur die Lage dieser seiner Endpunkte unverändert bleibt.

Ebenso ergiebt sich, dass $F$ auch unabhängig von der Form des Stromleiters $\sigma$ zwischen den Punkten $c$ und $d$ ist, wenn nur diese beiden Endpunkte von $\sigma$ unverändert bleiben.

Die Grösse $F$ hängt also von keinen anderen Raumgrössen ab, als von den Coordinaten der Punkte $a$, $b$, $c$ und $d$. Wenn nun überhaupt die Gesammtwirkungen, welche zwei Ströme auf einander ausüben, als die Summen der gleichartigen Wirkungen aller einzelnen Elemente des einen auf alle einzelnen Elemente des anderen betrachtet werden dürfen, so sind die Ausdrücke $Q$ und $F$ entstanden durch Integrationen über sämmtliche Elemente von $s$ und $\sigma$, und die Function $F$, welche nur von den Coordinaten der Endpunkte ab-

hängt, muss also die Form haben:

$$F = F_{b,d} - F_{a,d} - F_{b,c} + F_{a,c},$$

wo jede dieser rechts stehenden Functionen nur von der Lage der durch die Indices bezeichneten Punkte abhängt.

Die einzige Raumgrösse, welche durch zwei Punkte vollständig bestimmt ist, ist deren Entfernung; also müssen $F_{b,d}$ etc. Functionen der Entfernungen $r_{b,d}$ etc. sein. Von andern Raumgrössen können sie nicht abhängen, wohl aber können sie noch beliebige Functionen der Intensitäten $i$ und $j$ sein.

Reduciren wir nun die beiden Stromleiter $s$ und $\sigma$ auf zwei verschwindend kleine Elemente $Ds$ und $D\sigma$, und verstehen wir unter $F$ irgend eine Function der Entfernung $r$ dieser Elemente und der Intensitäten $i$ und $j$, so wird

$$F_{b,d} - F_{a,d} - F_{b,c} + F_{a,c} = \frac{d^2 F}{ds . d\sigma} . Ds . D\sigma .$$

Dies ist also die allgemeinste Form der Ergänzung, welche dem *Neumann*schen Ausdrucke des Potentials zweier Stromelemente gegeben werden kann, ohne dass dadurch die Gesammtwirkung eines geschlossenen Stroms auf einen beliebig beschaffenen anderen Strom geändert wird.

Ich erlaube mir im Folgenden die Form der Function $F$ durch die schon in der Einleitung erwähnten Hypothesen zu beschränken, welche sich auf die Analogie der sämmtlichen bisher bekannten Fälle elektrischer Wirkungen stützen.

Erstens setze ich die in der Function $F$ zusammengefassten Wirkungen den Intensitäten $i$ und $j$ direct proportional.

Zweitens setze ich voraus, dass die Abhängigkeit von der Entfernung in diesem Falle dieselbe ist, wie bei allen anderen elektrischen Fernwirkungen, die sich von einem Massenelement gleichmässig nach allen Richtungen ausbreiten; dass nämlich die Potentialfunction proportional $\frac{1}{r}$, die Kräfte proportional $\frac{1}{r^2}$ sind.

Nach diesen beiden Hypothesen haben wir zu setzen

$$\frac{d^2 F}{ds . d\sigma} = B . i . j . \frac{d^2 r}{ds . d\sigma},$$

wo $B$ eine Constante bezeichnet.

Bezeichnen wir die Coordinaten von $Ds$ und $D\sigma$ beziehlich mit $x$, $y$, $z$ und $\xi$, $\eta$, $\zeta$, die Projectionen beider Elemente auf die Coordinaten beziehlich

mit $Dx$, $Dy$, $Dz$ und $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$, so ist

$$\frac{dr}{ds} \cdot Ds = \frac{x-\xi}{r} \cdot Dx + \frac{y-\eta}{r} \cdot Dy + \frac{z-\zeta}{r} \cdot Dz$$
$$= \cos(r, Ds) . Ds,$$
$$\frac{dr}{d\sigma} \cdot D\sigma = -\cos(r, D\sigma) . Ds,$$

wenn $(r, Ds)$ und $(r, D\sigma)$ die Winkel bezeichnen, welche die vom Punkte $(\xi, \eta, \zeta)$ nach $(x, y, z)$ positiv gerechnete Richtung von $r$ mit den Richtungen der Elemente $Ds$ und $D\sigma$ macht.

Weiter erhalten wir durch nochmalige Differentiirung:

$$\frac{d^2 r}{ds . d\sigma} \cdot Ds . D\sigma$$
$$= -\frac{1}{r}(Dx . D\xi + Dy . D\eta + Dz . D\zeta) + \frac{1}{r} \cos(r, Ds) . \cos(r, D\sigma) Ds . D\sigma$$

oder

$$\frac{d^2 r}{ds . d\sigma} = \frac{1}{r}[\cos(r, Ds) . \cos(r, D\sigma) - \cos(Ds . D\sigma)].$$

Es hat also der oben gegebene Werth von $\frac{d^2 F}{ds . d\sigma}$ wirklich dieselbe Art der Abhängigkeit von $r$, wie andere elektrische Potentialfunctionen. Dagegen wäre, wie man sich leicht überzeugt, keine andere Function von $r$, als allein $F = B . i . j . r$, im Stande den in den obigen beiden Hypothesen gestellten Anforderungen zu genügen.

Was die Annahme insbesondere betrifft, dass die Function $F$ den Intensitäten $i$ und $j$ direct proportional sei, so werden wir es im Folgenden mit Gleichungen zu thun haben, in denen die Stromintensitäten nur linear vorkommen. Sollte also die Abhängigkeit der Function $F$ von $i$ eine solche sein, dass sie nach Potenzen von $i$ entwickelt höhere Potenzen dieser Grösse eintreten liesse, als die erste, — worauf bisher aber noch keine Erfahrungsthatsache hindeutet, — so würden immerhin unsere Gleichungen noch für Strömungen von einer gewissen geringeren Intensität ihre Geltung behalten.

Dasselbe würde, wie schon erwähnt, der Fall sein, wenn nach einer von Herrn *W. Weber* aufgestellten Hypothese, die Fernwirkungen nicht bloss von der Intensität, sondern auch vom Product der Intensität und der Dichtigkeit der freien Elektricität abhängen sollten, eine Hypothese, die übrigens ebenfalls noch durch keine Erfahrungsthatsache unterstützt wird.

In den von uns zu behandelnden Fällen wenigstens würde die Dichtigkeit im Innern der Leiter bei verschwindend kleinen Stromintensitäten immer selbst

eine verschwindend kleine Grösse derselben Ordnung sein, und also das Product beider zu vernachlässigen.

Beide Möglichkeiten würden also nur die Breite der Anwendbarkeit unserer Folgerungen für stärkere Ströme beschränken, ohne ihre Richtigkeit für schwache Ströme aufzuheben.

Ich setze jetzt, um den von uns zu brauchenden verallgemeinerten Ausdruck des elektrodynamischen Potentials zweier Elemente auf die zweckmässigste Form zu bringen, die oben gebrauchte Constante

$$B = -\frac{1-k}{2}\cdot A^2,$$

worin $k$ eine neue Constante bezeichnet. Dann wird das Potential zweier Stromelemente gleich dem Ausdrucke:

$$(1.)\quad -\tfrac{1}{2}A^2\frac{i.j}{r}[(1+k).\cos(Ds, D\sigma)+(1-k).\cos(r, Ds).\cos(r, D\sigma)]Ds.D\sigma.$$

## §. 2.

### Umformung der Ausdrücke des Potentials für continuirlich im Raume verbreitete Strömungen.

Ich bezeichne mit $u, v, w$ die Componenten der elektrischen Strömung in Richtung der positiven rechtwinkligen Coordinaten $x, y, z$ im Innern eines continuirlich durchströmten Körpers, und die Werthe des elektrodynamischen Potentials, welches die sämmtlichen vorhandenen Ströme in Bezug auf die Stromcomponenten $u, v, w$ im Volumenelemente $dx.dy.dz$ hervorbringen, der Reihe nach mit

$$-A^2.\ U.u\ .dx.dy.dz,$$
$$-A^2.\ V.v\ .dx.dy.dz,$$
$$-A^2.W.w\ .dx.dy.dz.$$

Der Werth von $U$ ist nach dem in Gleichung (1.) festgestellten Werthe des Potentials je zweier einzelner Stromelemente

$$(1^a.)\ U=\iiint\left\{\frac{1+k}{2}\cdot\frac{u}{r}+\frac{1-k}{2}\cdot\frac{x-\xi}{r^3}[u.(x-\xi)+v(y-\eta)+w(z-\zeta)]\right\}.d\xi.d\eta.d\zeta.$$

$$r^2 = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2.$$

Unter dem Integralzeichen sind $u, v, w$ als Functionen von $\xi, \eta, \zeta$ zu nehmen, und die Integration ist entweder über den ganzen Raum, oder wenigstens über alle Stellen des Raumes auszudehnen, in denen elektrische Strömungen oder Bewegungen elektrisirter Massen vorkommen.

Die Werthe von $V$ und $W$ erhalten wir, wenn wir in ($1^a$.) vertauschen

$$U, \quad u, \quad x, \quad \xi$$

mit

$$V, \quad v, \quad y, \quad \eta$$

oder mit

$$W, \quad w, \quad z, \quad \zeta.$$

Der Werth von $U$ lässt sich auch in folgender Form schreiben:

$$(1^b.) \quad U = \iiint \left\{ \frac{u}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \left[ u \cdot \frac{d^2 r}{dx . d\xi} + v \cdot \frac{d^2 r}{dx . d\eta} + w \cdot \frac{d^2 r}{dx . d\zeta} \right] \right\} . d\xi . d\eta . d\zeta .$$

Bezeichnen wir mit $\Psi$ folgenden Ausdruck

$$(1^c.) \quad \Psi = \iiint \left( u \cdot \frac{dr}{d\xi} + v \cdot \frac{dr}{d\eta} + w \cdot \frac{dr}{d\zeta} \right) . d\xi . d\eta . d\zeta ,$$

so können wir, vorausgesetzt, dass $\Psi$ einen endlichen Werth hat, die Werthe von $U$, $V$ und $W$ in folgender Form geben:

$$(1^d.) \quad \begin{cases} U = \dfrac{1-k}{2} \cdot \dfrac{d\Psi}{dx} + \iiint \dfrac{u}{r} . d\xi . d\eta . d\zeta , \\ V = \dfrac{1-k}{2} \cdot \dfrac{d\Psi}{dy} + \iiint \dfrac{v}{r} . d\xi . d\eta . d\zeta , \\ W = \dfrac{1-k}{2} \cdot \dfrac{d\Psi}{dz} + \iiint \dfrac{w}{r} . d\xi . d\eta . d\zeta . \end{cases}$$

In dem Ausdrucke ($1^c$.) für $\Psi$ sind die Grössen $\frac{dr}{d\xi}$, $\frac{dr}{d\eta}$, $\frac{dr}{d\zeta}$ ächte Brüche, und $\Psi$ ist jedenfalls endlich, wenn, wie im Folgenden mit Ausnahme von §. 7 immer angenommen werden wird, nur endliche elektrische Massen mit endlicher Geschwindigkeit bewegt werden, und diese sich alle in endlicher Entfernung von einander befinden, so dass jenseits eines gewissen Abstandes

$$(1^e.) \quad u = v = w = 0.$$

Um die Continuität der Functionen $\Psi$, $U$, $V$ und $W$, so wie ihrer Differentialquotienten festzustellen, beziehlich die Ausnahmefälle zu finden, nehmen wir hierzu noch die Gleichungen, welche die Constanz der Quantität der Elektricität ausdrücken.

Bezeichnen wir mit $\varphi$ die Potentialfunction der freien Elektricität, so ist im Innern eines Raumes, in welchem die Elektricität endliche Dichtigkeit hat, die Abnahme dieser Dichtigkeit für die Zeiteinheit gleich

$$(2.) \quad \frac{1}{4\pi} \frac{d\Delta\varphi}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} ,$$

worin das Zeichen $\Delta$ die Operation bezeichnet

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} .$$

Und an einer mit Elektricität belegten Fläche $\Omega$ mag $N$ die Normale der Fläche bezeichnen, $a, b, c$ die Winkel, welche ihre Richtung mit den positiven Axenrichtungen der $x, y, z$ bildet, $d\Omega$ das Flächenelement; $\varphi, u, v, w$ mögen Werthe dieser Functionen bezeichnen an der Seite der Fläche, die der negativen Richtung der Normale zugekehrt ist, dagegen $\varphi_1$, $u_1$, $v_1$ und $w_1$ die Werthe an der Seite der Fläche, wo die positive Richtung der Normale hinzeigt. Dann ist die Zunahme der Elektricitätsmenge auf der Flächeneinheit gleich

$$(2^a.)\quad \frac{1}{4\pi}\left[\frac{d^2\varphi}{dt.dN}-\frac{d^2\varphi_1}{dt.dN}\right] = (u-u_1)\cos a+(v-v_1)\cos b+(w-w_1)\cos c.$$

Wenn man nun mit Benutzung von (2.) und ($2^a$.) die Gleichung ($1^c$.) partiell integrirt, so erhält man

$$(2^b.)\quad \Psi = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int r\left(\frac{d\varphi}{dN}-\frac{d\varphi_1}{dN}\right).d\Omega-\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int r.\Delta\varphi.d\xi.d\eta.d\zeta,$$

oder auch, wenn man die freie Elektricität mit $E$ bezeichnet,

$$(2^c.)\quad \Psi=\frac{1}{4\pi}\int r.\frac{dE}{dt}.d\xi.d\eta.d\zeta.$$

Die Integrale, welche bei der Bildung von ($2^b$.) sich auf die unendlich entfernte Grenzfläche des Raumes beziehen, müssen nach der bei ($1^e$.) gemachten Annahme gleich Null werden, und sind deshalb weggelassen.

Durch Benutzung des *Green*schen Satzes ergiebt sich ferner, dass, wenn $\frac{d\varphi}{dt}$ nirgends discontinuirlich ist, das heisst, wenn nirgends elektromotorische Flächen von veränderlicher Kraft vorkommen, der in ($2^b$.) angegebene Werth von $\Psi$ gleich sei

$$\Psi = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{d\varphi}{dt}.\Delta r.d\xi.d\eta.d\zeta.$$

Auch hier können wieder die auf die unendlich entfernte Grenzfläche des Raumes bezüglichen Integrale weggelassen werden, unter Voraussetzung, dass daselbst $\frac{d\varphi}{dt}$ keine grösseren Glieder enthält, als solche von der Form

$$B.\frac{\cos\alpha}{r^2},$$

wo $\alpha$ der Winkel ist, den die Linie $r$ mit irgend einer festen geraden Linie bildet, und $B$ eine Constante. Die gemachte Voraussetzung wird immer zutreffen, wenn alle zu berücksichtigenden elektrischen Bewegungen nur in endlicher Entfernung von der untersuchten Stelle vor sich gehen.

Da nun

$$\Delta r = \frac{2}{r},$$

so folgt:

$$(2^d.)\quad \begin{cases} \Psi = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{1}{r}\cdot d\xi.d\eta.d\zeta, \\ \text{und} \\ \Delta\Psi = 2\cdot\dfrac{d\varphi}{dt}. \end{cases}$$

Die Function $\Psi$ ist also analytisch darstellbar als die Potentialfunction einer mit der Dichtigkeit $-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$ ausgebreiteten Masse. Da nun $\frac{d\varphi}{dt}$ jedenfalls nicht an einer Fläche unendlich wird, so ist $\Psi$ überall stetig, ebenso seine Differentialquotienten $\frac{d\Psi}{dx}$, $\frac{d\Psi}{dy}$, $\frac{d\Psi}{dz}$; beide mit eventueller Ausnahme solcher Punkte, in denen $\frac{d\varphi}{dt}$ unendlich wird.

*Demgemäss sind die oben in* ($1^d.$) *gegebenen Werthe von U, V, W jedenfalls überall stetig, mit Ausnahme solcher Punkte, wo die elektrische Strömung unendlich wird.*

Es ergiebt sich ferner aus ($2^d.$) durch Differentiation nach $x$

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{x-\xi}{r^3}\cdot d\xi.d\eta.d\zeta,$$

und durch partielle Integration nach $\xi$

$$(2^e.)\qquad \frac{d\Psi}{dx} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d^2\varphi}{dt.d\xi}\cdot\frac{1}{r}\cdot d\xi.d\eta.d\zeta.$$

Daraus folgt, dass auch die ersten Differentialquotienten von $\Psi$ nach $x$, $y$, $z$ genommen als Potentialfunctionen einer Masse dargestellt werden können, deren Dichtigkeit $-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{d^2\varphi}{dt.dx}$ ist. Diese ist überall endlich, ausgenommen in Punkten, in denen die Geschwindigkeiten unendlich werden. Also müssen mit Ausnahme solcher Punkte auch die zweiten Differentialquotienten von $\Psi$ überall stetig sein.

Nachdem dies festgestellt ist, folgt aus den in ($1^b.$) für $U$, $V$ und $W$ gegebenen Werthen, dass auch $U$, $V$, $W$ mit Ausnahme einzelner Punkte unter den angegebenen Voraussetzungen überall, namentlich auch an den Grenzflächen der Leiter stetige Differentialquotienten haben müssen. Dasselbe Resultat kann übrigens auch direct aus der Gleichung ($1^a.$) mittels ähnlicher Betrachtungen abgeleitet werden, wie sie angewendet werden, um für die Potentialfunctionen von Massen endlicher Dichtigkeit den gleichen Beweis zu führen.

Aus der Gleichung ($2^d$.) folgt

$$(2^f.) \quad \Delta\Psi = 2\frac{d\varphi}{dt}$$

und demgemäss aus ($1^d$.)

$$(3.) \quad \begin{cases} \Delta U = (1-k)\cdot\dfrac{d^2\varphi}{dx.dt} - 4\pi u, \\ \Delta V = (1-k)\cdot\dfrac{d^2\varphi}{dy.dt} - 4\pi v, \\ \Delta W = (1-k)\cdot\dfrac{d^2\varphi}{dz.dt} - 4\pi w. \end{cases}$$

Ferner ergiebt sich aus ($1^d$.)

$$\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz} = \frac{1-k}{2}\cdot\Delta\Psi + \int\left(u\cdot\frac{\xi-x}{r^3}+v\cdot\frac{\eta-y}{r^3}+w\cdot\frac{\zeta-z}{r^3}\right).d\xi.d\eta.d\zeta.$$

Indem man aus ($2^f$.) für das erste Glied links den Werth setzt, und das folgende Glied partiell integrirt mit Berücksichtigung von (2.) und ($2^a$.), so erhält man

$$(3^a.) \quad \frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz} = -k\cdot\frac{d\varphi}{dt}.$$

Nachdem diese Eigenschaften der Functionen $U$, $V$, $W$ festgestellt sind, können wir zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen übergehen.

## §. 3.

### Bewegungsgleichungen der Elektricität.

Die elektromotorische Kraft, die im Punkte $x$, $y$, $z$ wirkt, ist zusammengesetzt aus derjenigen, die von der elektrostatischen Kraft der freien Elektricität herrührt, und deren Grösse durch die negativ genommenen Differentialquotienten der Potentialfunction $\varphi$ der freien Elektricität gegeben wird, und ferner aus der Inductionskraft, die in Richtung der $x$ gleich $-A^2\frac{dU}{dt}$ ist. Bezeichnen wir also den Widerstand eines prismatischen Leiters von der Einheit der Länge und Einheit des Querschnitts mit $\varkappa$, so sind folgendes die Bewegungsgleichungen der Elektricität: *)

---

*) Um die hier gegebenen Gleichungen auf die *Kirchhoff*schen zurückzuführen setze man

| | $k$ | $\varkappa$ | $\varphi$ | $A^2$ |
|---|---|---|---|---|
| statt | | | | |
| nunmehr | $-1$ | $\frac{2}{4k}$ | $\frac{1}{2}\Omega$ | $\frac{2}{c^2}$. |

$$(3^b.)\quad \begin{cases} \varkappa u = -\dfrac{d\varphi}{dx} - A^2\dfrac{dU}{dt}, \\ \varkappa v = -\dfrac{d\varphi}{dy} - A^2\dfrac{dV}{dt}, \\ \varkappa w = -\dfrac{d\varphi}{dz} - A^2\dfrac{dW}{dt}. \end{cases}$$

Was den Werth der Constanten $\varkappa$ betrifft, so ist Herrn *W. Weber*s elektromagnetische Stromeinheit nach unserer Bezeichnung gleich $\frac{1}{A}$, seine Einheit der elektromotorischen Kraft dagegen gleich $A$ zu setzen, also seine elektromagnetische Widerstandseinheit gleich $A^2$. Für Kupferdrähte von 1 Millimeter Länge und 1 Milligramm Gewicht ergeben seine Messungen die Grösse des Widerstands, aus verschiedenen Drahtproben berechnet, wie folgt:

| | |
|---|---|
| *Jacobi*s Draht . . . . . . . . . . . | 2 310 000 |
| *Kirchhoff*s Draht . . . . . . . . . . | 1 916 000 |
| *W. Weber*s Draht . . . . . . . . . | 1 865 000 |
| Mittel . . . | 2 030 300 |

Um für einen Leiter von einem Millimeter Länge und einem Quadratmillimeter Querschnitt den Widerstand zu finden, muss man diese Zahlen durch das specifische Gewicht des Kupfers 8,95 dividiren, und so ergiebt sich als dem Mittel jener drei Kupfersorten entsprechend

$$\varkappa = 227000\, A^2 \frac{\text{Quadratmillimeter}}{\text{Secunden}}$$

oder

$$\varkappa = \frac{1}{425370 \,.\, 10^{12}}\ \text{Secunden}.$$

Der bestleitende Draht von galvanoplastischem Kupfer ergiebt

$$\varkappa = \frac{1}{513144 \,.\, 10^{12}}\ \text{Secunden}.$$

In den Gleichungen ($3^b$.) sind $U$, $V$, $W$ und $\varphi$ zunächst als Integrale gegeben. Um die betreffenden Gleichungen in die Form von Differentialgleichungen zu bringen, brauchen wir nur die genannten vier Grössen als Unbekannte zu benutzen.

Wir haben dabei zu unterscheiden:

1) Theile des Raums, die wir mit $S$ bezeichnen wollen, welche leitend sind, und auf deren Inneres keine anderen Kräfte wirken, als die elektrostatischen und inducirten elektromotorischen Kräfte. Innerhalb solcher Theile

gelten die Gleichungen ($3^b$.), welche bei Berücksichtigung von (3.) die Form annehmen:

$$
\text{(I.)}\quad \begin{cases}
\Delta U-(1-k)\dfrac{d^2\varphi}{dx.dt} = \dfrac{4\pi}{\varkappa}\left\{\dfrac{d\varphi}{dx}+A^2\dfrac{dU}{dt}\right\}, \\
\Delta V-(1-k)\dfrac{d^2\varphi}{dy.dt} = \dfrac{4\pi}{\varkappa}\left\{\dfrac{d\varphi}{dy}+A^2\dfrac{dV}{dt}\right\}, \\
\Delta W-(1-k)\dfrac{d^2\varphi}{dz.dt} = \dfrac{4\pi}{\varkappa}\left\{\dfrac{d\varphi}{dz}+A^2\dfrac{dW}{dt}\right\}.
\end{cases}
$$

2) In anderen Theilen des Raumes können wir die elektrischen Strömungen als vorgeschrieben betrachten. Dies wird zum Beispiel der Fall sein, wo elektrisch geladene Isolatoren bewegt werden, oder elektrische Ströme in Drähten unter Einfluss relativ grosser hydroëlektrischer Kräfte circuliren. Auch wenn man Magnete durch ein System elektrischer Ströme ersetzt denkt, sind diese als unveränderlich vorgeschriebene Ströme zu betrachten. Diese Theile des Raumes mögen mit $S_1$, die Werthe der Functionen $U$, $V$, $W$, $\varphi$ etc. mit $U_1$, $V_1$, $W_1$, $\varphi_1$ etc. bezeichnet werden. In ihnen ist

$$
\text{(I}^a\text{.)}\quad \begin{cases}
\Delta U_1-(1-k)\dfrac{d^2\varphi_1}{dx.dt} = -4\pi u_1, \\
\Delta V_1-(1-k)\dfrac{d^2\varphi_1}{dy.dt} = -4\pi v_1, \\
\Delta W_1-(1-k)\dfrac{d^2\varphi_1}{dz.dt} = -4\pi w_1.
\end{cases}
$$

3) Im ganzen Raume $S$ und $S_1$ gilt die Gleichung ($3^a$.)

$$
\text{(II.)}\quad \frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz} = -k\cdot\frac{d\varphi}{dt},
$$

$$
\text{(II}^a\text{.)}\quad \frac{dU_1}{dx}+\frac{dV_1}{dy}+\frac{dW_1}{dz} = -k\cdot\frac{d\varphi_1}{dt}.
$$

4) Die Grenzbedingungen an mit Elektricität belegten Flächen $\Omega$ sind

$$
\text{(III.)}\quad U-U_1 = V-V_1 = W-W_1 = \varphi-\varphi_1 = 0,
$$

$$
\text{(IV.)}\quad \frac{dU}{dN}-\frac{dU_1}{dN} = \frac{dV}{dN}-\frac{dV_1}{dN} = \frac{dW}{dN}-\frac{dW_1}{dN} = 0.
$$

5) In unendlicher Entfernung von den Leitern und bewegten Massen

$$
\text{(V.)}\quad U = V = W = \varphi = 0.
$$

Wenn aus diesen Gleichungen $U$, $V$, $W$ und $\varphi$ bestimmt sind, erhält man $u$, $v$, $w$ durch die Gleichungen (3.).

Das System der Gleichungen (I.) bis (V.) vertritt vollständig die Be-

dingungen der Aufgabe, die ausgesprochen sind durch die Gleichungen ($1^a$.), nebst den entsprechenden Gleichungen für $v$ und $w$, und durch (2.), ($2^a$.), ($3^b$.).

Da das System (I.) bis (V.) abgeleitet ist aus den Bedingungsgleichungen der Aufgabe, so fügt es keine neuen Bedingungen hinzu, die jene nicht enthalten.

Umgekehrt ist nachzuweisen, dass, *wenn das System* (I.) *bis* (V.) *erfüllt ist, jene vier Bedingungsgleichungen der Aufgabe erfüllt sind.*

Zunächst ist ersichtlich, dass die Gleichungen ($3^b$.) unmittelbar aus (I.) erhalten werden, wenn man $\Delta U$ etc. durch die Geschwindigkeiten ausdrückt, wie in den $u$, $v$, $w$ definirenden Gleichungen (3.) vorgeschrieben ist.

Die Gleichung (2.) erhält man, wenn man die Gleichungen (II.) und ($II^a$.) der Operation $\Delta$ unterwirft, und die Werthe von $\Delta \frac{dU}{dx}$ etc. aus (3.) bildet.

Die Gleichung ($2^a$.), welche an Flächen $\Omega$ gilt, erhält man durch folgende Betrachtungen. Wenn $\Psi$ eine Function ist, die auf beiden Seiten der Fläche $\Omega$ gleiche Werthe hat,

$$\Psi = \Psi_1,$$

aber $\frac{d\Psi}{dN}$ von $\frac{d\Psi_1}{dN}$ verschieden ist, so ist, wie leicht zu sehen,

$$\frac{d(\Psi-\Psi_1)}{dx} = \frac{d(\Psi-\Psi_1)}{dN}\cos a,$$

$$\frac{d(\Psi-\Psi_1)}{dy} = \frac{d(\Psi-\Psi_1)}{dN}\cos b,$$

$$\frac{d(\Psi-\Psi_1)}{dz} = \frac{d(\Psi-\Psi_1)}{dN}\cos c,$$

wo $a$, $b$, $c$ wie früher die Winkel sind, welche die Normale $N$ mit den Coordinatenaxen macht. Da $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{dU}{dz}$ auf beiden Seiten der Fläche $\Omega$ nicht verschieden sind, so ist

$$\frac{d^2(U-U_1)}{dx.dy} = \frac{d}{dN}\left\{\frac{d(U-U_1)}{dy}\right\}\cos a,$$

$$\frac{d^2(U-U_1)}{dy.dy} = \frac{d}{dN}\left\{\frac{d(U-U_1)}{dy}\right\}\cos b,$$

und daraus folgt:

$$\frac{d^2(U-U_1)}{dx.dy}\cos b - \frac{d^2(U-U_1)}{dy^2}\cdot\cos a = 0.$$

Daraus folgt weiter, dass, wenn man die Werthe von $\frac{d\varphi}{dt}$ und $\frac{d\varphi_1}{dt}$ aus den Gleichungen (II.) entnimmt,

$$\cos a\left[\varDelta(U-U_1)+k\frac{d^2(\varphi-\varphi_1)}{dt.dx}\right]+\cos b\left[\varDelta(V-V_1)+k\frac{d^2(\varphi-\varphi_1)}{dt.dy}\right]$$
$$+\cos c\left[\varDelta(W-W_1)+k\frac{d^2(\varphi-\varphi_1)}{dt.dz}\right] = 0,$$

und wenn man hierin für $\varDelta U$, $\varDelta U_1$ u. s. w. die Werthe setzt aus (3.) und ($I^a$.), so folgt die Gleichung ($2^a$.).

Endlich ist noch zu erweisen, dass die Functionen $U$, $V$, $W$ der Gleichungen (I.) bis (V.), wenn man vermöge der Gleichungen (3.) die Geschwindigkeiten $u$, $v$, $w$ einführt, gleich den in ($1^a$.) und gemäss ($1^a$.) gebildeten Werthen dieser Grössen sind. Dies geht daraus hervor, dass eine Function, die überall endlich und stetig ist, deren Differentialquotienten ebenfalls überall endlich und stetig sind, und die in unendlicher Entfernung gleich Null ist, wie dies die Gleichungen (III.), (IV.), (V.) von $U$, $V$, $W$ aussagen, nach den bekannten Sätzen über Potentialfunctionen dargestellt werden kann in der Form

$$U = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\varDelta U}{r}.d\xi.d\eta.d\zeta.$$

Setzt man nun statt $\varDelta U$ die in (3.) und ($I^a$.) gegebenen Werthe, so erhält man Gleichungen von der Form ($1^d$.), wo der Werth von $\frac{d\Psi}{dx}$ etc. zunächst in der Form von ($2^e$.) gegeben ist. Die Transformationen aber des Werthes von $\Psi$, welche uns von der Form ($1^c$.) zu ($2^e$.) geführt haben, und welche auf partiellen Integrationen beruhten, kann man alle rückwärts machen, und kommt so auf die Gleichungen ($1^d$.) und ($1^c$.), die nur eine andere Schreibweise von ($1^a$.) sind.

Es ist in diesen Entwickelungen keine Rücksicht genommen auf das Vorkommen elektromotorischer (hydroëlektrischer oder thermoëlektrischer) Molecularprocesse. Haben diese constante Kraft, so geben sie einfach einen den übrigen Strömen superponirten constanten Strom. Haben sie aber inconstante Kraft, so lassen sich die Umformungen der Function $\Psi$ nicht immer so ausführen, wie oben geschehen.

---

Die in der Einleitung erwähnte *Analogie zwischen den Bewegungen der Elektricität in einem Leiter und denen eines Gases* zeigt sich in folgender Weise. Es sei $p$ der Druck, $\varrho$ die Dichtigkeit, $u$, $v$, $w$ die Componenten der Strömungsgeschwindigkeit; letztere seien so klein, $p$ und $\varrho$ so wenig von den Werthen $p_0$ und $\varrho_0$ in der ruhenden Flüssigkeit unterschieden, dass die

Glieder zweiter Dimension der Grössen $(p-p_0)$, $(\varrho-\varrho_0)$ vernachlässigt werden können. Dann sind die Bewegungsgleichungen eines reibenden Gases, auf dessen Inneres keine äusseren Kräfte wirken:

$$-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} - \mu\Delta u - \nu\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right),$$

$$-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{dp}{dy} = \frac{dv}{dt} - \mu\Delta v - \nu\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right),$$

$$-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{dp}{dz} = \frac{dw}{dt} - \mu\Delta w - \nu\frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right),$$

$$-\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{d\varrho}{dt} = \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}.$$

Man setze

statt $u, \quad v, \quad w, \quad \frac{p-p_0}{\varrho_0}, \quad \frac{\varrho-\varrho_0}{\varrho_0}, \quad \mu, \quad \nu$

$U, \quad V, \quad W, \quad \frac{1}{A^2}\varphi, \quad k\varphi, \quad \frac{\varkappa}{4\pi A^2}, \quad \frac{1-k}{k}\cdot\frac{\varkappa}{4\pi A^2},$

so erhalten wir die für das Innere eines Leiters von constantem Leitungsvermögen geltenden Bewegungsgleichungen der Elektricität. Dabei ergiebt sich

$$\frac{p-p_0}{\varrho-\varrho_0} = \frac{1}{kA^2}.$$

Dem kann ein Gas von stabilem Gleichgewicht nur entsprechen, wenn $k$ positiv ist. Ist $k=0$, wie in Herrn *Maxwells* Annahme, so würde die Elektricität sich wie eine incompressible Flüssigkeit bewegen. Auch müssen die beiden Reibungscoefficienten $\mu$ und $\nu$ positiven Werth haben, wenn die Vergleichung statthaft sein soll, was bei $\nu$ nur der Fall ist, wenn $1 > k > 0$ ist.

Die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit entsprechen aber hierbei, wie man sieht, nicht den Geschwindigkeiten der Elektricität, sondern den elektromotorischen Kräften. Die Geschwindigkeiten der Elektricität wären vielmehr den durch die Reibung hervorgebrachten Bewegungskräften proportional.

Die Grenzbedingungen freilich sind abweichend; indessen giebt eine solche Vergleichung immerhin einen Anhalt für die Vorstellung.

## §. 4.

### Eindeutigkeit der Lösungen und Stabilität des Gleichgewichts.

Bezeichnen wir mit $\Phi$ denjenigen Theil der Arbeit, welcher durch Abänderung der elektrischen Strömungen in den Leitern $S$ verändert wird,

so besteht derselbe aus zwei Theilen $\Phi_0$, welcher den elektrodynamischen, und $\Phi_1$, welcher den elektrostatischen Wirkungen entspricht. Die ganze Grösse dieser Arbeit ist

$$(4.)\qquad \Phi = \Phi_0 + \Phi_1,$$

$$(4^a.)\qquad \Phi_0 = \tfrac{1}{2}A^2\int(Uu+Vv+Ww)\,dx.dy.dz,$$

$$(4^b.)\qquad \Phi_1 = \frac{1}{8\pi}\int\varphi\left(\frac{d\varphi}{dN}-\frac{d\varphi_1}{dN}\right)d\Omega - \frac{1}{8\pi}\int\varphi.\Delta\varphi.dx.dy.dz.$$

Durch partielle Integration ist dieser letztere Werth, wie bekannt, auf die Form zu bringen

$$(4^c.)\qquad \Phi_1 = \frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]dx.dy.dz$$

und ist also nothwendig positiv.

In dem Werthe von $\Phi_0$ ersetzen wir zunächst $u, v, w$ durch die Werthe dieser Grössen in (3.) und ($I^a$.) und erhalten

$$\Phi_0 = -\frac{A^2}{8\pi}\int\Big\{U.\Delta U+V.\Delta V+W.\Delta W - (1-k)\left[U\frac{d^2\varphi}{dx.dt}+V\frac{d^2\varphi}{dy.dt}+W\frac{d^2\varphi}{dz.dt}\right]\Big\}dx.dy.dz.$$

Wenn man hier partiell integrirt mit Berücksichtigung der Gleichungen (III.), (IV.) und (V.), so erhält man

$$\Phi_0 = \frac{A^2}{8\pi}\int\Big\{\Sigma\left[\left(\frac{dU_m}{dx_n}\right)^2\right]+\frac{1-k}{k}\left[\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz}\right]^2\Big\}dx.dy.dz.$$

Hierin bezeichnet $U_m$ irgend eine von den Grössen $U, V, W$, und $x_n$ irgend eine von den Coordinaten $x, y, z$.

Wenn man berücksichtigt, wie sich aus (III.) und (IV.) durch partielle Integration ergiebt, dass

$$\int\left(\frac{dU}{dy}\cdot\frac{dV}{dx}-\frac{dU}{dx}\cdot\frac{dV}{dy}\right)dx.dy.dz = 0,$$

so verwandelt sich der letzte Ausdruck in

$$(4^d.)\qquad \Phi_0 = \frac{A^2}{8\pi}\int\Big\{\Sigma\left[\left(\frac{dU_m}{dx_n}-\frac{dU_n}{dx_m}\right)^2\right]+k\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\Big\}dx.dy.dz.$$

Durch die in ($4^c$.) und ($4^d$.) gegebenen Werthe von $\Phi_1$ und $\Phi_0$ ergiebt sich, dass beide nothwendig positiv sind, wenn $k$ einen positiven Werth hat, oder gleich Null ist. Wenn aber $k$ einen negativen Werth hat, so kann das Arbeitsäquivalent der elektrischen Bewegung negativ, also kleiner als im Gleich-

gewichtszustand werden. Es wäre alsdann der Zustand der Ruhe nicht ein Minimum der Arbeit, also das Gleichgewicht in diesem Zustande nicht stabil.

Der Unterschied im Verlauf der Störungen des Gleichgewichtszustandes, je nachdem $k$ positiv oder negativ ist, zeigt sich noch bestimmter, wenn wir die Gleichung der lebendigen Kraft für die elektrischen Bewegungen aufstellen. Dieselbe wird uns auch dazu dienen, nachzuweisen, dass durch die Gleichungen (I.) bis (V.), wenn gleichzeitig der Anfangszustand gegeben ist, die elektrische Bewegung eindeutig bestimmt ist, vorausgesetzt, dass $k \geqq 0$.

Wenn nämlich zwei von einander verschiedene Lösungen der Gleichungen (I.) bis (V.) existirten, und in der einen

$$U',\quad V',\quad W',\quad \varphi',$$

in der andern

$$U'',\quad V'',\quad W'',\quad \varphi''$$

die Werthe der in den Gleichungen vorkommenden Functionen wären, so würden auch ihre Unterschiede

$$(4^e.)\qquad \begin{cases} U'-U''=U, & V'-V''=V, \\ W'-W''=W, & \varphi'-\varphi''=\varphi \end{cases}$$

gesetzt, den Gleichungen (I.) bis (V.) genügen, wenn in diesen $u_1=v_1=w_1=0$ gesetzt würde.

Um nun zu ermitteln, unter welchen Bedingungen eine solche Verschiedenheit der Lösungen möglich wäre, wollen wir den Werth von $\frac{d\Phi}{dt}$ mittels der Gleichungen (I.) bis (V.) bestimmen, wobei wir festsetzen, dass

$$(5.)\qquad u_1=v_1=w_1=0$$

sei, also keine Bewegung der Elektricität ausserhalb der Leiter $S$ vorkomme.

Aus den in §. 1 aufgestellten Principien ist schon klar, dass der Werth sein muss

$$(5^a.)\qquad \frac{d\Phi}{dt} = -\int \varkappa(u^2+v^2+w^2)\,dS,$$

da, wenn äussere inducirende Kräfte fehlen, die in der Leitung erzeugte Wärme, deren mechanisches Aequivalent rechts in Gleichung ($5^a$.) steht, nur erzeugt werden kann auf Kosten des Arbeitsäquivalents der elektrischen Vertheilung und Bewegung. In der That lässt sich die Gleichung ($5^a$.) verificiren aus den Gleichungen (3.), (I.) bis (V.), (4.) bis ($4^d$.) und (5.). Am einfachsten geschieht dies mittels der mit (I.) identischen Gleichungen ($3^b$.)

$$\int \varkappa (u^2+v^2+w^2)\,dS = -\int\left(u\cdot\frac{d\varphi}{dx}+v\cdot\frac{d\varphi}{dy}+w\cdot\frac{d\varphi}{dz}\right)dS$$
$$-A^2\int\left(u\cdot\frac{dU}{dt}+v\cdot\frac{dV}{dt}+w\cdot\frac{dW}{dt}\right)dS.$$

Aus der in ($1^b$.) vorgeschriebenen Bildungsweise von $U$ und der in ($4^a$.) vorgeschriebenen von $\Phi_0$ ist leicht ersichtlich, dass

$$A^2\int\left(u\cdot\frac{dU}{dt}+v\cdot\frac{dV}{dt}+w\cdot\frac{dW}{dt}\right)dS = A^2\int\left(U\cdot\frac{du}{dt}+V\cdot\frac{dv}{dt}+W\cdot\frac{dw}{dt}\right)dS = \frac{d\Phi_0}{dt}.$$

Ferner ergiebt sich aus ($4^c$.) leicht

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{1}{4\pi}\int\left[\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx.dt}+\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d^2\varphi}{dy.dt}+\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d^2\varphi}{dz.dt}\right]dx.dy.dz$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int\varphi\cdot\left(\frac{d^2\varphi}{dN.dt}-\frac{d^2\varphi_1}{dN.dt}\right)d\Omega - \frac{1}{4\pi}\int\varphi.\Delta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)dx.dy.dz,$$

und wenn wir hierin die Grössen $u$, $v$, $w$ mittels der Gleichungen (2.) und ($2^a$.) einführen, und partiell integriren, ergiebt sich

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \int\left(u\cdot\frac{d\varphi}{dx}+v\cdot\frac{d\varphi}{dy}+w\cdot\frac{d\varphi}{dz}\right)dx.dy.dz.$$

Da ausserhalb $S$ nach Gleichung ($5^a$.) $u$, $v$, $w$ überall Null sind, ist es einerlei, ob wir die Integration in diesem letzten Ausdruck nur auf den Raum $S$, oder auf den ganzen unendlichen Raum ausdehnen.

Diese Umformungen zeigen, dass die Gleichungen (I.) bis (V.) der Forderung des Gesetzes von der Erhaltung der Kraft, wie sie in ($5^a$.) aufgestellt ist, entsprechen.

Die Gleichung ($5^a$.) zeigt, dass die Grösse $\frac{d\Phi}{dt}$ nur einen negativen Werth haben kann, da das rechts stehende Integral eine Summe von lauter Quadraten ist, und $\varkappa$, der Widerstand, jedenfalls positiv.

*A.* Wenn $k \geqq 0$ ist, ist $\Phi$ nothwendig immer positiv, und kann nicht kleiner als Null werden. Ist es also in irgend einem Augenblicke der Bewegung gleich Null, so muss es von da ab fortdauernd gleich Null sein. Damit $\Phi$ aber Null sei, müssen alle die positiven Quadrate, deren Summe es ist, gleich Null sein, also entsprechend (4.), ($4^c$.) und ($4^d$.)

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

was, da $\varphi$ im Unendlichen gleich Null sein muss, nur geschehen kann, wenn im ganzen Raume $\varphi = 0$, d. h. wenn gar keine freie Elektricität existirt.

Ferner, wenn wir ($4^d$.) gleich Null setzen, ergiebt sich

$$\frac{dU}{dy} = \frac{dV}{dx}, \qquad \frac{dV}{dz} = \frac{dW}{dy}, \qquad \frac{dW}{dx} = \frac{dU}{dz},$$

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0.$$

Durch Differentiiren erhält man aus diesen Gleichungen:

$$\Delta U = \Delta V = \Delta W = 0,$$

und da ausserdem $U$, $V$, $W$ und ihre ersten Differentialquotienten nirgends unstetig sein sollen, so folgt, dass im ganzen Raume

$$U = V = W = 0.$$

Daraus folgt also entsprechend den Gleichungen ($4^e$.), dass, wenn im Anfang der Bewegung

$$U' - U'' = V' - V'' = W' - W'' = \varphi' - \varphi'' = 0,$$

diese Differenzen fortdauernd gleich Null bleiben.

*Wenn also* $k \geqq 0$ *und wenn für den Anfang der Bewegung die Werthe von* $U$, $V$, $W$ *gegeben sind, so bestimmen die Gleichungen* (I.) *bis* (V.) *in Verbindung mit* (3.) *die Bewegung der Elektricität vollständig.*

Es folgt ferner daraus, dass, wenn wir für die Zeit $t < \tau$ und $t > \tau$ zwei verschiedene analytische Ausdrücke der Bewegung haben, diese eine einzige continuirliche Bewegung darstellen, wenn zur Zeit $t = \tau$ beide Ausdrucksformen überall im Raume gleiche Werthe von $\varphi$, $U$, $V$ und $W$ ergeben.

*B. Wenn k negativ ist*, so kann $\Phi$ negativ werden, und die Bewegung der Elektricität kommt nicht nothwendig zum Stillstand, wenn $\Phi$ gleich Null wird. Aber auch in diesem Falle muss, wenn äussere Einwirkungen fehlen, $\frac{d\Phi}{dt}$ nach Gleichung ($5^a$.) nothwendig immer einen negativen Werth haben, und wenn also $\Phi$ einmal negativ geworden ist, so muss es zu immer grösseren und grösseren negativen Werthen fortschreiten. Damit $\Phi$ einen endlichen negativen Werth $F$ haben könne, muss nothwendig der mit dem negativen $k$ multiplicirte Theil seines Werthes

$$\int \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 dx \,.\, dy \,.\, dz = \frac{1}{k^2} \int \left[\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz}\right]^2 dx \,.\, dy \,.\, dz$$

grösser als $\frac{1}{(-k)} F$ sein und bleiben.

Wenn $\varphi$ überall endlich ist und bleibt, so muss $\frac{d\varphi}{dt}$ in endlichen Theilen des Raumes einen endlichen Werth haben, damit das vorstehende Integral

einen endlichen Werth haben könne. Wenn die leitenden Körper $S$ endlich begrenzt sind, nimmt $\frac{d\varphi}{dt}$ in unendlicher Entfernung ab wie $\frac{1}{r^2}$, und die von unendlich entfernten Theilen des Raumes herrührenden Theile des Integrals werden also jedenfalls unendlich klein. Damit aber $\frac{d\varphi}{dt}$ endliche Werthe in endlicher Raumerstreckung habe, müssen endliche Geschwindigkeiten der Elektricität in endlichen Räumen, oder unendlich grosse Geschwindigkeiten in unendlich kleinen Räumen bestehen. Denn es ist

$$\frac{d\varphi}{dt} = \int \left[ u \cdot \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r}\right) + v \cdot \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{r}\right) + w \cdot \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{1}{r}\right) \right] d\xi \,.\, d\eta \,.\, d\zeta.$$

Wenn aber die Geschwindigkeiten fortdauernd in endlichen Räumen endliche Werthe haben, muss $\frac{d\Phi}{dt}$ nach Gleichung ($5^a$.) fortdauernd einen endlichen negativen Werth haben, und $\Phi$ also fortdauernd wachsen bis zu unendlicher negativer Grösse.

Daraus folgt, dass, wenn nicht $\frac{d\varphi}{dt}$, $u$, $v$ oder $w$ von vorn herein an einzelnen Stellen unendliche Werthe haben, sie jedenfalls mit der Zeit zu unendlichen Werthen anwachsen müssen. Ist also bei negativem $k$ die Grösse $\Phi$ nur einmal negativ geworden, so wird die entsprechende elektrische Bewegung sich fortwährend an Intensität steigern, wenn sie nicht von Anfang an in einzelnen Stellen unendlich ist.

Das bedeutet also, dass *bei negativen Werthen von k das Gleichgewicht der ruhenden Elektricität in leitenden Körpern ein labiles Gleichgewicht ist.*

Bewegungen, welche $\Phi$ negativ machen, sind in sehr mannichfacher Weise möglich. Man braucht nur anzunehmen, dass in irgend einem Augenblick keine freie Elektricität existire, also $\varphi = 0$ sei, und dass ausserdem sei

$$U = \frac{d\chi}{dx}, \qquad V = \frac{d\chi}{dy}, \qquad W = \frac{d\chi}{dz}.$$

Dann fallen alle positiven Theile von $\Phi$ weg, und nur der negative bleibt übrig. Die Function $\chi$ ist hierbei nur den Bedingungen unterworfen, dass nach den Gleichungen ($I^a$.) bis (V.) und ($5^a$.) ausserhalb $S$

$$\Delta\Delta\chi = 0$$

und an den Grenzen von $S$ die ersten und zweiten Differentialquotienten von $\chi$ continuirlich und in unendlicher Entfernung gleich Null seien. Es kann $\chi$ innerhalb $S$ vollkommen beliebig gewählt werden, und ist dann für den Aussenraum bis auf eine willkürliche Constante bestimmt.

Unter diesen Umständen ist nun auch die für positive Werthe von $k$ gezogene Folgerung nicht zulässig, dass die Gleichungen (I.) bis (V.) die Bewegung der Elektricität eindeutig bestimmen, wenn die Werthe $U, V, W, \varphi$ für die Anfangszeit gegeben sind. Es kann sich nämlich zu der gegebenen Anfangsbewegung eine verschwindend kleine labile Bewegung gesellen, welche nach Verlauf einer gewissen Zeit endliche Werthe erhält.

Wohl aber kann auch für negative Werthe von $k$ gezeigt werden, dass, wenn in zwei verschiedenen Integralen der Gleichungen (I.) bis (V.) sich die Grössen $U, V, W, \varphi$ zu Anfang und zu Ende einer gewissen Zeit unendlich wenig von einander unterscheiden, die beiden Integrale auch während der ganzen Dauer dieser Zeit sich unendlich wenig von einander unterscheiden.

Denn für ihre Differenz gilt Gleichung ($5^a$.), und ist $\frac{d\Phi}{dt}$ fortdauernd negativ. Wenn also für ihre Differenz der Werth von $\Phi$ zu Anfang und zu Ende der betreffenden Zeitperiode verschwindend klein ist, so muss er während der ganzen Dauer dieser Periode verschwindend klein gewesen sein.

Wenn also auf einen elektrischen Leiter während einer gewissen endlichen Zeit inducirende Kräfte einwirken, und ein Integral der entsprechenden Bewegung gefunden wird, welches die Werthe von $U, V, W, \varphi$ für $t = -\infty$ und $t = +\infty$, gleich Null ergiebt, so giebt es keine zweite Lösung, die denselben Bedingungen genügte.

## §. 5.

### Radiale Strömungen der Elektricität in einer leitenden Kugel.

Die Erörterungen des vorigen Paragraphen zeigen nur die Möglichkeit, dass unendlich fortschreitende Störungen des elektrischen Gleichgewichts eintreten könnten, wenn $k$ einen negativen Werth hat; aber sie lassen noch dem Zweifel Raum, ob solche Störungen auch wirklich zu Stande kommen können bei denjenigen Methoden elektrische Bewegungen hervorzurufen, welche uns bei Versuchen zu Gebote stehen.

Um zu zeigen, dass dies der Fall sei, wird es genügen, ein möglichst einfaches Beispiel zu behandeln, und ich wähle dazu radiale Bewegungen der Elektricität in einer Kugel, die hervorgebracht werden durch Verengerung und Erweiterung einer äusseren concentrischen, mit Elektricität geladenen Kugelschaale. In dieser Form wird zwar das wirkliche Experiment nicht leicht ausgeführt werden. Aber es ist zu bemerken, dass ein unserem Falle ent-

sprechendes, von den Richtungen der Radien unabhängiges Glied jedesmal vorkommen wird, wenn man die durch Annäherung eines elektrisirten Körpers in der Kugel hervorgerufene Bewegung nach Kugelfunctionen entwickelt. Denkt man sich nämlich alle die elektrischen Bewegungen in der Kugel superponirt (und ungestörte Superposition verschiedener Bewegungen ist möglich), welche dadurch entstehen würden, dass der gleiche elektrisirte Körper von allen möglichen verschiedenen Richtungen aus zur Kugel in gleicher Weise bewegt wird, so wird die Summe aller dieser Bewegungen auf den von uns zu behandelnden Fall führen, und es ist klar, dass die durch solche Superposition entstandene Gesammtbewegung kein mit der Zeit in das Unendliche wachsendes Glied enthalten kann, wenn nicht die ursprüngliche einzelne Bewegung ein solches enthält. Stellt sich also heraus, dass unser vorausgesetzter einfachster Fall eine labile Störung des elektrischen Gleichgewichts ergiebt, so folgt, dass diese auch stattfindet in jedem Falle, wo eine elektrische Masse in gleicher Weise der leitenden Kugel genähert und entfernt worden ist, wie wir dies von der von uns angenommenen concentrischen elektrischen Schicht voraussetzen.

Wir setzen

$$x = \varrho \cos\alpha, \quad y = \varrho \cos\beta, \quad z = \varrho \cos\gamma.$$

Der Radius der leitenden Kugel sei $\mathfrak{R}$; über eine grössere concentrische Kugelfläche von dem veränderlichen Radius $R$ sei die elektrische Masse $M$ gleichmässig ausgebreitet. Die elektrischen Strömungen sollen nur in Richtung des Radius geschehen; wir werden also setzen können

$$(6.) \qquad u = \frac{d\chi}{dx}, \qquad v = \frac{d\chi}{dy}, \qquad w = \frac{d\chi}{dz}.$$

Da alles um den Mittelpunkt der Kugel symmetrisch ist, werden auch die Werthe der elektromotorischen Kräfte $U$, $V$, $W$ von der Form sein:

$$(6^a.) \qquad U = \frac{d\Pi}{dx}, \qquad V = \frac{d\Pi}{dy}, \qquad W = \frac{d\Pi}{dz},$$

und $\varphi$ wird wie $\chi$ und $\Pi$ nur eine Function von $\varrho$ und $t$ sein.

Da die Herren *W. Weber* und *Lorberg* die Annahme gemacht haben, die Elektricität könne auch träge Masse haben, so will ich diese Annahme in diesem Paragraphen ebenfalls recipiren, und den linken Seiten der Bewegungsgleichungen ($3^b$.) noch entsprechende Glieder hinzusetzen; die träge Masse der elektrostatischen elektrischen Einheit werde mit $\mu$ bezeichnet. Die Gleichungen ($3^b$.) verschmelzen dann in eine Integralgleichung für das Innere der Kugel

$$(6^b.) \qquad \mu\frac{d\chi}{dt} + \varkappa\chi = -\varphi - A^2\frac{d\Pi}{dt},$$

und die Gleichungen (3.) und ($3^a$.), die im ganzen Raume gelten, werden:

$$(6^c.)\qquad \varDelta\Pi = (1-k)\frac{d\varphi}{dt}-4\pi\chi,$$

$$(6^d.)\qquad \varDelta\Pi = -k\frac{d\varphi}{dt}.$$

Die Gleichungen ($6^b$.) und ($6^c$.) treten hier an Stelle von je drei Gleichungen, die durch Differentiirung nach $x$, $y$ und $z$ aus ihnen entstehen. Es ist beim Uebergang von den letzteren zu ihren beiden Integralgleichungen nicht nöthig, eine willkürliche Function der Zeit hinzuzufügen, da eine solche schon in $\Pi$ und $\chi$ steckt, deren Differentialquotienten nach $x$, $y$, $z$ genommen wir allein brauchen.

Die letzten beiden Gleichungen ergeben noch, wenn sie von einander subtrahirt werden:

$$(6^e.)\qquad \frac{d\varphi}{dt} = 4\pi\chi.$$

Die Gleichung ($6^d$.) ergiebt ferner, dass $\Pi$ durch den ganzen Raum gleich der Potentialfunction der Dichtigkeit $\frac{k}{4\pi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$ sei. Dadurch ist $\Pi$ ebenfalls bis auf eine willkürliche Function der Zeit, die keinen Einfluss auf die Lösung unserer Aufgabe hat, vollständig bestimmt, wenn $\varphi$ gefunden ist.

Zur Bestimmung von $\varphi$ im Innern der Kugel ergiebt sich zunächst aus der Gleichung ($6^b$.), wenn wir an ihr die Operation $\varDelta$ ausführen, und die Werthe von $\Pi$ und $\chi$ aus ($6^d$.) und ($6^e$.) substituiren:

$$(7.)\qquad \varDelta\left\{\frac{\mu}{4\pi}\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}+\varphi\right\} = A^2k\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Im äussern Raume dagegen ist der Werth von $\varphi$ nur abhängig von den Gesammtmengen der Elektricität $\mathfrak{M}$ auf der Kugel vom Radius $\mathfrak{R}$, $M$ auf der vom Radius $R$.

$$(7^a.)\qquad \begin{cases} \text{Für } \mathfrak{R} < \varrho < R \text{ ist } \varphi = \dfrac{\mathfrak{M}}{\varrho}+\dfrac{M}{R} \text{ und } \dfrac{d\varphi}{dt} = -\dfrac{M}{R^2}\cdot\dfrac{dR}{dt}; \\ \text{für } \varrho > R \text{ ist } \varphi = \dfrac{\mathfrak{M}+M}{\varrho} \text{ und } \dfrac{d\varphi}{dt} = 0. \end{cases}$$

Was die Grenzbedingungen (III.), (IV.), (V.) betrifft, so sind diese erfüllt, wenn $\Pi$ die Potentialfunction von $\frac{k}{4\pi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$, und letztere Grösse überall continuirlich ist. Also die einzige Grenzbedingung ist, dass die aus der Gleichung (7.) gefundene Function $\varphi$ für $\varrho = \mathfrak{R}$ sei

$$(7^b.)\qquad \varphi = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}+\frac{M}{R}.$$

Ich bemerke hier gleich, dass für den Fall $k = 0$, wenn wir mit $e$ die Dichtigkeit der Elektricität bezeichnen, die Gleichung (7.) ergiebt:

$$\mu \frac{d^2 e}{dt^2} + \varkappa \frac{de}{dt} + 4\pi e = 0,$$

woraus folgt

$$e = B_0 e^{-n_0 t} + B_1 e^{-n_1 t},$$

wo $n_0$ und $n_1$ die beiden Wurzeln der Gleichung sind:

$$\mu n^2 - \varkappa n + 4\pi = 0.$$

Soll vor Einwirkung der äusseren Kräfte Ruhe bestehen, so muss $B_0 = B_1 = 0$ sein, folglich für alle Zeit $e = \frac{de}{dt} = 0$. Folglich tritt gar keine Bewegung ein, wenn $k = 0$.

Die im vorigen Paragraphen aufgestellten Sätze über den Werth des Arbeitsäquivalents der elektrischen Bewegung und die continuirliche Abnahme dieses Werthes bei einer durch äussere Kräfte nicht influirten Bewegung ändern sich in unserem Falle nur in so weit, als zu dem elektrostatischen und elektrodynamischen Arbeitsäquivalent noch die lebendige Kraft der bewegten Elektricität hinzukommt, deren Grösse ist

$$\Phi_2 = \frac{\mu}{2} \int (u^2 + v^2 + w^2)\, dS = \frac{\mu}{32.\pi^2} \int \left(\frac{d^2\varphi}{dt.d\varrho}\right)^2 dS,$$

die Integration über die ganze Kugel ausgedehnt.

Wenn man die Gleichung (7.) mit $\frac{d\varphi}{dt}$ multiplicirt, über die ganze Ausdehnung der Kugel integrirt, und diese Integration partiell ausführt, beachtend, dass in diesem Falle an der Oberfläche der Kugel $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ ist, so können wir der Bezeichnung des vorigen Paragraphen entsprechend setzen:

$$\tfrac{1}{2} A^2 k \int \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 dS + \frac{\mu}{8\pi} \int \left(\frac{d^2\varphi}{dt.d\varrho}\right)^2 dS + \tfrac{1}{2} \int \left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^2 dS = 4\pi . \Phi$$

und erhalten dann das Resultat:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\varkappa}{16\pi^2} \int \left(\frac{d^2\varphi}{dt.d\varrho}\right)^2 . dS.$$

Es entspricht diese Gleichung der Gleichung ($5^a$.) des vorigen Paragraphen, mit der durch Einführung der Grösse $\mu$ bedingten Modification, und es lassen sich dieselben Schlüsse betreffs der Stabilität des Gleichgewichts, der Eindeutigkeit der Lösungen, der Continuität zweier Bewegungen von verschiedenem analytischen Ausdruck daraus ableiten.

---

Ablauf elektrischer Radialströme in der Kugel ohne äussere Einwirkung.

Um später die vollständigen Integrale der durch eine gegebene äussere Einwirkung hervorgerufenen Ströme finden zu können, müssen wir zuerst das vollständige Integral der Gleichung (7.) mit der Grenzbedingung ($7^b$.) suchen für den Fall, dass

$$(8.)\qquad \frac{dR}{dt} = 0.$$

Setzen wir innerhalb der Kugel

$$(8^a.)\qquad \varphi = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} + \frac{M}{R} + \frac{B_\mathfrak{a}}{\varrho}\cdot e^{n_\mathfrak{a} t}\cdot \sin\left(\frac{\pi\mathfrak{a}\varrho}{\mathfrak{R}}\right),$$

so ist Gleichung ($7^b$.) erfüllt, wenn $\mathfrak{a}$ eine ganze Zahl ist, und Gleichung (7.), wenn

$$(8^b.)\qquad -\frac{\pi^2\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{R}^2}\left\{\frac{\mu}{4\pi}\cdot n_\mathfrak{a}^2 + \frac{\varkappa}{4\pi}\cdot n_\mathfrak{a} + 1\right\} = A^2.k.n_\mathfrak{a}^2$$

oder

$$(8^c.)\qquad \frac{1}{n_\mathfrak{a}} = -\frac{\varkappa}{8\pi} \pm \sqrt{\left(\frac{\varkappa}{8\pi}\right)^2 - \frac{\mu}{4\pi} - k\left(\frac{A\mathfrak{R}}{\pi\mathfrak{a}}\right)^2}.$$

Die beiden hier für $\frac{1}{n_\mathfrak{a}}$ gegebenen Werthe sind auch die Werthe für die Grösse

$$n_\mathfrak{a}\left[\frac{\mu}{4\pi} + k\left(\frac{A\mathfrak{R}}{\pi\mathfrak{a}}\right)^2\right].$$

Ich bemerke dabei, dass ein complexer Werth für $\mathfrak{a}$ die Bedingungen nicht erfüllen kann, da ein solcher einen complexen auch für $n$ ergeben würde, und dann nicht für jeden Werth von $t$ die Gleichung ($7^b$.) zu erfüllen wäre.

Da $\varkappa$ und $\mu$ positive Grössen bedeuten, so hat $n_\mathfrak{a}$ Werthe, deren reeller Theil jedenfalls negativ ist, und einer zum Gleichgewichtszustand zurückkehrenden Bewegung entspricht, wenn $k$ positiv ist.

Ist $k$ dagegen negativ, so wird $n$ ebenfalls für sehr grosse Werthe von $\mathfrak{a}$ negative reelle Theile haben. Wenn aber $\mathfrak{R}$ gross genug ist, dass für niedrige Werthe von $\mathfrak{a}$

$$-k\left(\frac{A\mathfrak{R}}{\pi\mathfrak{a}}\right)^2 > \frac{\mu}{4\pi},$$

so wird von den beiden entsprechenden Werthen von $n_\mathfrak{a}$ einer positiv werden, und einer das Gleichgewicht zerstörenden Bewegung entsprechen. Wenn $\mu = 0$ ist, wird dies für jeden Werth von $\mathfrak{a}$ der Fall sein. Hat $\mu$ einen gewissen positiven Werth, so wird jedenfalls $\mathfrak{R}$ so gross gedacht werden können, dass es der vorstehenden Ungleichung Genüge leistet. Da übrigens die Constante

$\mu$ so klein ist, dass ihr Einfluss durch keine bisher angestellten Versuche sich entdecken liess, so wird es sich dabei gar nicht um erhebliche Werthe von $\mathfrak{R}$ handeln. Hätte $\mu$ Werthe, welche neben der Grösse $A^2\mathfrak{R}^2$ in Betracht kämen, wenn $\mathfrak{R}$ auch nur mit den Dimensionen gewöhnlich gebrauchter Drahtspiralen vergleichbar wäre, so müssten solche Spiralen, die zwei neben einander laufende Fäden enthalten, einen merklichen Extracurrent auch dann geben, wenn beide Fäden in entgegengesetzter Richtung durchströmt werden. In diesem Falle würde es das durch die Grösse $\mu$ gemessene Beharrungsvermögen der Elektricität fast allein sein, was den Extracurrent in Gang erhielte. Jedenfalls ist aber der so entstehende Extracurrent verschwindend klein gegen denjenigen, welcher bei gleich gerichteter Durchströmung solcher Doppelspiralen entsteht, und dessen Grösse von dem mit $A^2$ multiplicirten Potential der ganzen Spirale, auf sich selbst genommen, abhängt.

Aus der Gleichung ($8^a$.) können wir ein vollständiges Integral der Gleichungen (7.) und ($7^b$.) ableiten in der Form:

$$(9.)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} + \dfrac{M}{R} + \varphi_0, \\ \varphi_0 = \dfrac{1}{\varrho} \sum\limits_{a=0}^{a=\infty} \left\{ [B_a . e^{n_a t} + \mathfrak{B}_a . e^{\mathfrak{n}_a t}] \sin\left(\dfrac{\pi a \varrho}{\mathfrak{R}}\right) \right\}. \end{cases}$$

Darin sind $n_a$ und $\mathfrak{n}_a$ die beiden Werthe, welche Gleichung ($8^b$.) für den betreffenden Werth von $a$ ergiebt, $B_a$ und $\mathfrak{B}_a$ aber sind willkürliche Coefficienten, welche so bestimmt werden können, dass $\varphi$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ für $t=0$ willkürlich gegebene Functionen von $\varrho$ im Innern der Kugel werden.

Wenn $\varphi$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ für die Zeit $t=0$ gegeben sind, so ist in unserem Falle, wo

$$\frac{dU}{dy} = \frac{dV}{dx}, \qquad \frac{dV}{dz} = \frac{dW}{dy}, \qquad \frac{dW}{dx} = \frac{dU}{dz},$$

der Anfangszustand vollständig bestimmt, da dann die Potentiale $\Phi_0$ und $\Phi_1$ nach ($4^c$.) und ($4^d$.) vollständig bestimmt sind, ebenso wie das von der lebendigen Kraft der elektrischen Bewegung abhängige Glied $\Phi_2$ des Potentials, welches noch hinzukommt, wenn $\mu$ von Null verschieden ist. Es können also zwei Bewegungen, für welche $\varphi$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ überall im Anfang gleich ist, sich, wenigstens wenn $k$ positiv ist, überhaupt nicht von einander unterscheiden. Ebenso wenig können sich bei negativem Werthe von $k$ zwei Bewegungen von einander unterscheiden, bei denen zur Zeit $t=0$ die Functionen $\varphi$ und

$\frac{d\varphi}{dt}$ überall die gleichen Werthe haben, und die beide nach Ablauf unendlicher Zeit

$$\varphi = \text{Const.},$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

machen. Zu dem Ende müssen in der Reihe (9.) nur die Glieder bewahrt bleiben, welche hinreichend grosse Werthe von $\alpha$ enthalten, dass $n_\alpha$ und $\mathfrak{n}_\alpha$ nur negative reelle Theile enthalten.

Die Fälle, wo $n_\alpha$ oder $\mathfrak{n}_\alpha$ positive reelle Theile enthalten, werden wir erst am Schlusse dieses Paragraphen besonders besprechen.

---

Elektrische Radialströme bei bestimmter äusserer Erregungsweise.

Es sei $\lambda$ irgend eine Constante, für welche wir nur, um die Behandlung von Ausnahmefällen zu umgehen, festsetzen, dass $\sin(\lambda\mathfrak{R})$ *nicht* gleich Null sein soll. Es seien ferner $\nu_0$ und $\nu_1$ die Werthe von $n$ aus der Gleichung

$$(9^a.)\qquad -\lambda^2\left\{\frac{\mu}{4\pi}n^2+\frac{\varkappa}{4\pi}n+1\right\} = A^2.k.n^2,$$

und es werde gesetzt:

$$(9^b.)\qquad \frac{M}{R} = \frac{C}{\nu_1-\nu_0}[\nu_1.e^{\nu_0 t}-\nu_0.e^{\nu_1 t}]+C_0,$$

so ist innerhalb der Kugel

$$(9^c.)\qquad \varphi = \frac{C}{\nu_1-\nu_0}\cdot\frac{\mathfrak{R}.\sin(\lambda\varrho)}{\varrho.\sin(\lambda\mathfrak{R})}[\nu_1.e^{\nu_0 t}-\nu_0.e^{\nu_1 t}]+\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}+\varphi_0+C_0,$$

wo unter $\varphi_0$ die in der Gleichung (9.) enthaltene unendliche Reihe zu verstehen ist.

Dass $\varphi$ ein Integral der Gleichung (7.) mit Einhaltung der Grenzbedingung ($7^b$.) ist, geht aus dem Bisherigen hervor. Die Coefficienten $B_\alpha$ und $\mathfrak{B}_\alpha$ der Reihe $\varphi_0$ werden wir nun nach *Fouriers* Methode so bestimmen können, dass für die Zeit $t=0$

$$(9^d.)\qquad \begin{cases}\varphi = C+\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}}+C_0,\\ \frac{d\varphi}{dt} = 0\end{cases}$$

wird. Zu dem Ende muss sein

$$(9^e.)\qquad \begin{cases}C\left[1-\frac{\mathfrak{R}.\sin(\lambda\varrho)}{\varrho.\sin(\lambda\mathfrak{R})}\right] = \frac{1}{\varrho}\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\left\{(B_\alpha+\mathfrak{B}_\alpha)\sin\left(\frac{\pi\alpha\varrho}{\mathfrak{R}}\right)\right\},\\ 0 = n_\alpha.B_\alpha+\mathfrak{n}_\alpha.\mathfrak{B}_\alpha,\end{cases}$$

was nach bekannten Rechnungsmethoden ergiebt:

$$(9^f.)\quad \begin{cases} B_\mathfrak{a}+\mathfrak{B}_\mathfrak{a} = (-1)^{\mathfrak{a}+1}.\dfrac{2\mathfrak{R}^3\lambda^2}{\pi\mathfrak{a}(\lambda^2\mathfrak{R}^2-\pi^2\mathfrak{a}^2)}, \\ B_\mathfrak{a} = \dfrac{-\mathfrak{n}_\mathfrak{a}}{n_\mathfrak{a}-\mathfrak{n}_\mathfrak{a}}[B_\mathfrak{a}+\mathfrak{B}_\mathfrak{a}], \\ \mathfrak{B}_\mathfrak{a} = \dfrac{n_\mathfrak{a}}{n_\mathfrak{a}-\mathfrak{n}_\mathfrak{a}}[B_\mathfrak{a}+\mathfrak{B}_\mathfrak{a}]. \end{cases}$$

Da die Coefficienten $B$ und $\mathfrak{B}$ für hohe Werthe von $\mathfrak{a}$ abnehmen, wie $\mathfrak{a}^{-3}$, so convergirt die Reihe für $\varphi_0$ und hat einen eindeutigen Werth für $t=0$ und alle positiven Werthe von $t$, wenn nicht eine von den Grössen $n_\infty$ oder $\mathfrak{n}_\infty$ positiv unendlich wird, was geschieht, wenn gleichzeitig $\mu=0$ und $k$ negativ ist. Ebenso sind die Reihen für $\frac{d\varphi}{dt}$ und für $\frac{d\varphi}{d\varrho}$, wenn $t \geqq 0$, und die Reihe für $\frac{d^2\varphi}{dt.d\varrho}$, wenn ausserdem auch $\mu=0$, convergent und eindeutig.

Unter diesen Umständen können wir den Grössen $\varphi$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ die ihnen in den Gleichungen ($9^d$.) für die Zeit $t=0$ und den ganzen Raum beigelegten Werthe auch für alle negativen Werthe von $t$ beilegen, ohne die Continuität der Bewegung zu stören.

Das entscheidende Kennzeichen für die Möglichkeit, zwei Bewegungen von verschiedenem analytischem Ausdrucke in einem gegebenen Zeitpunkte an einander zu schliessen, ist, wie oben gezeigt wurde, dass die den gesammten Arbeitswerth ihrer Differenz messende Function $\Phi$ gleich Null sei. Das ist aber im vorliegenden Beispiele der Fall, da die in dem Werthe von $\Phi$ vorkommenden Werthe von $\frac{d\varphi}{d\varrho}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, und eventualiter auch $\frac{d^2\varphi}{dt.d\varrho}$, für $t=0$ einerseits durch convergente Reihen gegeben sind, deren Werthe andrerseits mit den Werthen der Gleichungen ($9^d$.) zusammenfallen.

Dadurch ist also diejenige elektrische Bewegung in der Kugel gegeben, welche nach vorausgehendem Gleichgewichtszustande der Elektricität erregt wird, wenn von der Zeit $t=0$ ab die äussere Kugelschicht eine solche Bewegung ausführt, dass die elektrische Potentialfunction in dem Raume zwischen den beiden Kugeln die durch Gleichung ($9^b$.) gegebene Function der Zeit wird.

So oft entweder $\mu$ von Null verschieden ist, oder $k$ positiv ist, wird es immer möglich sein, für $\lambda$ einen so hohen Werth zu nehmen, dass $\nu_0$ und $\nu_1$ reelle negative Grössen sind, und also die Bewegung der äusseren Kugel eine vorübergehende ist. Dies werde im Folgenden immer angenommen.

Da man übrigens beliebig viele verschiedene Bewegungen derselben

Art, die zu verschiedener Zeit anfangen und verschiedene Intensität haben, in der Kugel superponiren kann, so erhalten wir die Lösung einer allgemeineren Form der letztbehandelten Aufgabe, wenn wir mit $\mathfrak{F}$ die elektrische Potentialfunction bezeichnen, die Bezeichnung $\varphi_t$ dagegen für die in den Gleichungen (9.) bis ($9^f$.) gegebene Function $\varphi$ der Zeit beibehalten und setzen:

$$(10.) \qquad \mathfrak{F} = \int_t^{\infty} \varphi_{(t-\infty)} \cdot \psi_\tau \, . \, d\tau + \int_{-\infty}^{t} \varphi_{(t-\tau)} \cdot \psi_\tau \, . \, d\tau.$$

Darin ist unter $\psi_\tau$ eine willkürliche Function von $\tau$ verstanden, von der wir nur voraussetzen, dass das Integral $\int \psi_\tau \, . \, d\tau$, zwischen welchen Grenzen man es auch nehme, immer endlich sei. Unter $\varphi_{(t-\infty)}$ dagegen ist der constante Werth verstanden, den in den Gleichungen (9.) bis ($9^f$.) das $\varphi_t$ für negative Werthe von $t$ hat:

$$\varphi_{(t-\infty)} = C + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} + C_0.$$

Zu bemerken ist, dass für den Raum zwischen beiden Kugelflächen bei der in Gleichung (10.) angezeigten Integration immer nur die Werthe von $\varphi$ zu nehmen sind, die diesem Zwischenraume entsprechen, auch wenn $R$ zeitweilig kleiner gewesen wäre, als das entsprechende $\varrho$.

Der Werth von $\varphi$ ist eine Summe von Theilen, die theils wie $\left(\frac{\mathfrak{M}}{\varrho} + C_0\right)$ in aller Zeit unverändert bleiben, und deshalb in der Gleichung (10.) auch nur eine Constante zum Werthe von $\mathfrak{F}$ hinzufügen, theils aber auch veränderlich sind.

Zunächst wollen wir berechnen, welcher Art von Bewegung der äusseren Kugelfläche die in Gleichung (10.) dargestellte Bewegung der Elektricität angehört, und dazu den Werth von $\mathfrak{F}$ für den Raum zwischen $\mathfrak{R}$ und $R$ berechnen. Der veränderliche Theil von $\varphi$ ist hier das Glied $\frac{M}{R} - C_0$, was wir als Function der Zeit mit $\varepsilon_t$ bezeichnen wollen. Es hat aber für negative Werthe von $t-\tau$ die Grösse $\varepsilon_{t-\tau}$ den constanten Werth $C$ und für positive Werthe von $t-\tau$ ist entsprechend der Gleichung ($9^b$.):

$$(10^a.) \qquad \varepsilon_{t-\tau} = \frac{C}{\nu_1 - \nu_0} [\nu_1 \, . \, e^{\nu_0 t} - \nu_0 \, . \, e^{\nu_1 t}].$$

Diese Grösse genügt, wie leicht zu sehen, der Differentialgleichung

$$(10^b.) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} - (\nu_0 + \nu_1) \frac{d\varphi}{dt} + \nu_0 \nu_1 \varphi = 0.$$

Bezeichnen wir nun den entsprechenden veränderlichen Theil von $\mathfrak{F}$ mit E, indem wir setzen

$$(10^c.)\qquad \mathrm{E} = C\int_t^\infty \psi_\tau\,.\,d\tau + \int_{-\infty}^t \varepsilon_{t-\tau}\,.\,\psi_\tau\,.\,d\tau.$$

Der oben gemachten Annahme gemäss sind $\nu_0$ und $\nu_1$ negative reelle Grössen, und $\psi_\tau$ immer endlich, folglich ist für $\tau = -\infty$

$$\varepsilon_{t-\tau}\,.\,\psi_\tau = 0,$$

ferner ist für $t = \tau$

$$\varepsilon_{t-\tau} = C \quad \text{und} \quad \frac{d\varepsilon_{t-\tau}}{dt} = 0.$$

Wenn wir mit Berücksichtigung davon die Differentialquotienten von E bilden, so erhalten wir

$$\frac{d\mathrm{E}}{dt} = \int_{-\infty}^t \frac{d\varepsilon_{t-\tau}}{dt}\,.\,\psi_\tau\,.\,d\tau,$$

$$\frac{d^2\mathrm{E}}{dt^2} = \int_{-\infty}^t \frac{d^2\varepsilon_{t-\tau}}{dt^2}\,.\,\psi_\tau\,.\,d\tau,$$

und indem wir diese Ausdrücke und $(10^c.)$ entsprechend der Gleichung $(10^b.)$ zusammenfügen, erhalten wir:

$$(10^d.)\qquad \frac{d^2\mathrm{E}}{dt^2} - (\nu_0+\nu_1)\frac{d\mathrm{E}}{dt} + \nu_0\,.\,\nu_1\mathrm{E} = \nu_0\,.\,\nu_1\,.\,C\,.\int_t^\infty \psi_\tau\,.\,d\tau.$$

Wenn wir also E als Function der Zeit als gegeben ansehen, so können wir mittels der letzten Gleichung daraus den entsprechenden Werth von $\psi$ herleiten. Eine nochmalige Differentiation nach $t$ giebt diesen Werth nämlich unmittelbar. Die Function E ist nur der Bedingung unterworfen, dass sie selbst, so wie $\frac{d\mathrm{E}}{dt}$ und $\frac{d^2\mathrm{E}}{dt^2}$ zu jeder Zeit endlich sein müssen, weil sie sonst nicht in Gestalt der oben gegebenen Integrale unzweideutig auszudrücken sind. Nun ist für die in Gleichung (10.) dargestellte Bewegung

$$\frac{M}{R} - C_0 = \mathrm{E}.$$

Folglich ist auch $\frac{M}{R}$ eine bis auf die Endlichkeit der ersten beiden Differentialquotienten willkürliche Bewegung der Zeit, und die Gleichung (10.) stellt die elektrische Bewegung in der leitenden Kugel für jede beliebige Bewegung der äusseren elektrischen Schicht mit continuirlich sich ändernder Geschwindigkeit dar.

Ausgeschlossen sind jedoch, wie mehrfach hervorgehoben ist, die Fälle, wo $\mu = 0$ und $k$ negativ ist, in denen die Reihe $(9^c.)$ nicht convergirt.

Ist $k$ positiv, so ist die Lösung die einzige mögliche, wie aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen und den im Anfange des jetzigen dazu gegebenen Zusätzen hervorgeht. Wird von einer gewissen Zeit ab E constant, und also $\psi_t = 0$, so bleiben nur Bewegungen übrig, die die Zeit mit Factoren von negativen reellen Theilen in den Exponenten haben, und daher zum Gleichgewichtszustand zurückkehren.

Wenn dagegen $k$ negativ ist, und $\mu$ einen positiven endlichen Werth hat, werden bei gewisser Grösse der leitenden Kugel eine Anzahl Exponenten $n_a$, welche den unterhalb einer gewissen Grenze liegenden Werthen von $a$ entsprechen, positiv sein, und schwellende Bewegungen darstellen, die nie zum Gleichgewicht zurückkehren. Das im Ausdruck für $\varphi$ Gleichung (9.) vorkommende Glied

$$B_a e^{n_a t}$$

giebt laut Gleichung (10.) im Werthe von $\mathfrak{F}$ ein Glied

$$B_a e^{n_a t} \int_{t_0}^{t_1} \psi_\tau \,.\, e^{-n_a \tau} \,.\, d\tau,$$

wenn $t_0$ und $t_1$ die Grenzen bezeichnen, zwischen denen $\psi_t$ von Null verschieden ist. Da $\psi_t$ innerhalb dieser Grenzen vollkommen willkürlich ist, wenn sein Integral nur endlich bleibt, so wird das Integral in dem letztgenannten Ausdruck nicht nothwendig gleich Null sein, und diese Glieder, welche schwellende Bewegungen darstellen, werden im Werthe von $\mathfrak{F}$ für Zeiten $t > t_1$ nicht zu fehlen brauchen.

Es könnte nun fraglich erscheinen, ob der gefundene Werth von $\mathfrak{F}$, der solche Glieder mit ansteigender Bewegung enthält, deren Summe mit $S$ bezeichnet werde, das einzige Integral der Bewegungsgleichungen ist, welches den vorgeschriebenen Werthen von $\frac{M}{R}$ und einem anfänglichen Zustande elektrischen Gleichgewichts entspricht, und ob nicht ein zweites davon verschiedenes Integral existire, welches keine Glieder von schwellender Bewegung enthielte.

Um diesen Zweifel zu beseitigen, beachte man, dass

$$\mathfrak{F} - S$$

ebenfalls ein Integral derselben Bewegungsgleichungen ist, welches denselben Werthen von $\frac{M}{R}$ entspricht, wie $\mathfrak{F}$, welches für $t = -\infty$ wie für $t = +\infty$ sich einem endlichen constanten Werthe nähert. Dieses letztere Integral hat aber einen anderen Anfangszustand. Nämlich vor der Einwirkung der Aenderungen von $R$ besteht schon die durch die Summe $S$ dargestellte schwellende

Bewegung. Sie wird durch die äussere Einwirkung vernichtet, und geht in eine abschwellende über, die den Gleichgewichtszustand erreicht. Im vorigen Paragraphen ist aber gezeigt worden, dass nur eine einzige solche Bewegung existiren kann, die unter Einwirkung gegebener äusserer Kräfte von einem gegebenen Zustand unendlich kleiner Bewegung zu einem Endzustand unendlich kleiner Bewegung führt. Also ist das Integral $\mathfrak{F} - S$ das einzige dieser Art, und es giebt kein anderes, welches bei den gegebenen Kräften aus anfänglichem in endliches Gleichgewicht führt.

*Untersuchung des Falls, wo k negativ und* $\mu = 0$. In diesem Falle giebt es keinen Werth von $\mathfrak{a}$ oder $\lambda$, für welchen nicht einer der beiden Werthe von $n_\mathfrak{a}$ oder $\nu$ reell positiv würde. Um daher eine dauernd endlich bleibende Bewegung zu erhalten, muss man die anfängliche Bewegung durch die schwellenden, die endliche durch die abschwellenden Glieder zusammensetzen.

Wir wollen mit $n_\mathfrak{a}$ und mit $\nu_0$ die positiven Werthe, mit $\mathfrak{n}_\mathfrak{a}$ und $\nu_1$ die negativen der Exponenten bezeichnen. Die Gleichungen ($8^b$.) und ($9^a$.) werden dabei:

$$(11.)\quad \begin{cases} A^2 k n_\mathfrak{a}^2 + \dfrac{\pi^2 \mathfrak{a}^2}{\mathfrak{R}^2}\left\{\dfrac{\varkappa}{4\pi} n_\mathfrak{a} + 1\right\} = 0, \\ A^2 k \nu^2 + \lambda^2\left\{\dfrac{\varkappa}{4\pi}\nu + 1\right\} = 0. \end{cases}$$

Man setze

1) für negative Werthe von $t$

$$(11^a.)\quad \frac{M}{R} = C.\nu_1.e^{\nu_0 t} + C.\nu_0,$$

und für $\mathfrak{R} < \varrho < R$

$$(11^b.)\quad \varphi = \frac{M}{R} + \frac{\mathfrak{M}}{\varrho},$$

für $\varrho < \mathfrak{R}$

$$(11^c.)\quad \varphi = C\cdot\frac{\mathfrak{R}.\sin(\lambda\varrho)}{\varrho.\sin(\lambda\mathfrak{R})}\cdot\nu_1.e^{\nu_0 t} + C.\nu_0 + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} + \frac{1}{\varrho}\Sigma\left\{B_\mathfrak{a}.e^{n_\mathfrak{a} t}.\sin\left(\frac{\pi\mathfrak{a}\varrho}{\mathfrak{R}}\right)\right\};$$

2) für positive Werthe von $t$

$$(11^d.)\quad \frac{M}{R} = C.\nu_1 + C.\nu_0.e^{\nu_1 t},$$

und für $\mathfrak{R} < \varrho < \mathfrak{R}$

$$(11^b.)\quad \varphi = \frac{\mathfrak{M}}{\varrho} + \frac{M}{R},$$

dagegen für $\varrho < R$

$$(11^e.)\quad \varphi = C.\nu_1 + C.\nu_0\cdot\frac{\mathfrak{R}.\sin(\lambda\varrho)}{\varrho.\sin(\lambda\mathfrak{R})}\cdot e^{\nu_1 t} + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} - \frac{1}{\varrho}\Sigma\left\{\mathfrak{B}_\mathfrak{a}.e^{\mathfrak{n}_\mathfrak{a} t}.\sin\left(\frac{\pi\mathfrak{a}\varrho}{\mathfrak{R}}\right)\right\}.$$

Die Continuität der Bewegung zur Zeit $t = 0$ ist hergestellt, wenn die Werthe von $\varphi$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ übereinstimmen, also:

$$(11^f.)\quad \begin{cases} 0 = C(\nu_0 - \nu_1)\left[1 - \frac{\mathfrak{R}.\sin(\lambda\varrho)}{\varrho.\sin(\lambda\mathfrak{R})}\right] + \frac{1}{\varrho}\Sigma\left\{(B_a + \mathfrak{B}_a).\sin\left(\frac{\pi a \varrho}{\mathfrak{R}}\right)\right\} \\ \text{und} \\ \qquad n_a B_a + \mathfrak{n}_a \mathfrak{B}_a = 0. \end{cases}$$

Es sind dies Gleichungen von der Form wie ($9^e$.) und finden ebenso ihre Lösung.

So ist zunächst eine immer endlich bleibende Lösung für die eine in den Gleichungen ($11^a$.) und ($11^d$.) vorgeschriebene Bewegung der äusseren elektrischen Schicht gewonnen. Aus dieser kann man wieder andere Lösungen für andere äussere Kräfte durch Superposition zusammensetzen.

Es ist ebenso, wie in dem allgemeineren Falle, wo $\mu$ nicht gleich Null war, der Beweis zu führen, dass durch solche Superposition jede beliebige Art der Bewegung der äusseren Kugel, bei der die Geschwindigkeit sich nur nicht sprungweise ändert, darzustellen ist.

Die durch eine solche Lösung dargestellte Bewegung ist eine, die immer endlich bleibt, und zur Zeit $t = -\infty$ wie zur Zeit $t = +\infty$ unendlich wenig vom Gleichgewichtszustande verschieden ist.

Da es für dieselben gegebenen Werthe von $\frac{M}{R}$ keine zweite derselben Art geben kann, so folgt, dass im Allgemeinen, wenn vor Beginn der Bewegung der Masse $M$ Ruhe geherrscht hat, eine dauernd fortschreitende Störung des Gleichgewichts in der Kugel erregt werden muss.

Ausnahmen hiervon können bei diesen und den vorigen Fällen, wo $k < 0 < \mu$, nur bei bestimmten Bewegungsweisen eintreten, wenn nämlich für *jedes* positive $n_a$

$$(11^g.)\qquad \int \psi_\tau . e^{-n_a \tau} d\tau = 0,$$

dies Integral zwischen den Grenzen genommen, zwischen welchen $\psi_\tau$ von Null unterschieden ist.

Für eine endliche Anzahl von Werthen von $a$ lässt sich diese Gleichung offenbar erfüllen, wenn man über entsprechend viele Constanten in dem Ausdruck für $\psi$ verfügen kann.

Da aber $\psi_\tau$ ganz willkürlich zwischen beliebigen Grenzen bestimmt werden kann, und nur der Bedingung unterworfen ist, dass

$$\int \psi_\tau . d\tau,$$

zwischen beliebigen Grenzen genommen, immer endlich bleibt, so werden die Gleichungen ($11^g$.) im Allgemeinen nicht erfüllt sein.

## §. 6.

### Ueber den Einfluss der Constante $k$ bei ausführbaren Versuchen.

Die Grössen $U$, $V$, $W$ in den Bewegungsgleichungen ($3^b$.) hängen nach ihrer in ($1^d$.) gegebenen Definition von der Constante $k$ ab. Um die Theile derselben, die davon abhängen, zu trennen von denjenigen, die von $k$ unabhängig sind, führen wir die Bezeichnung ein

$$(12.)\quad \begin{cases} \mathfrak{U} = U + \frac{k}{2}\frac{d\Psi}{dx}, \\ \mathfrak{V} = V + \frac{k}{2}\frac{d\Psi}{dy}, \\ \mathfrak{W} = W + \frac{k}{2}\frac{d\Psi}{dz}, \end{cases}$$

wo unter $\Psi$ die in der Gleichung ($2^c$.) definirte Function zu verstehen ist, und nach ($2^d$.)

$$(2^d.)\quad \Delta\Psi = 2\frac{d\varphi}{dt}.$$

$\Psi$ selbst, wie seine ersten und zweiten Differentialcoefficienten, nach den Coordinaten genommen, sind an den mit Elektricität belegten Flächen continuirlich.

Wir setzen ferner in diesem Paragraphen voraus, dass *die Abhängigkeit der behandelten Functionen von der Zeit nur dadurch gegeben sei, dass sie alle den Factor $e^{nt}$ enthalten.* Wenn $n$ complex oder imaginär ist, sind schliesslich in der Lösung nur die reellen Theile der betreffenden Functionen zu nehmen. Das System der Gleichungen (I.) bis (V.) wird unter diesen Umständen:

Im Innern der Leiter:

$$(12^a.)\quad \begin{cases} \frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\Delta\mathfrak{U} - A^2.n.\mathfrak{U} = \left(1+\frac{\varkappa n}{4\pi}\right)\cdot\frac{d\varphi}{dx} - A^2\cdot\frac{kn}{2}\cdot\frac{d\Psi}{dx}, \\ \frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\Delta\mathfrak{V} - A^2.n.\mathfrak{V} = \left(1+\frac{\varkappa n}{4\pi}\right)\cdot\frac{d\varphi}{dy} - A^2\cdot\frac{kn}{2}\cdot\frac{d\Psi}{dy}, \\ \frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\Delta\mathfrak{W} - A^2.n.\mathfrak{W} = \left(1+\frac{\varkappa n}{4\pi}\right)\cdot\frac{d\varphi}{dz} - A^2\cdot\frac{kn}{2}\cdot\frac{d\Psi}{dz}. \end{cases}$$

Ferner im äusseren Raume:

$$(12^b.)\quad \begin{cases} \Delta \mathfrak{U}_1 - n\cdot\dfrac{d\varphi_1}{dx} = -4\pi . u_1, \\ \Delta \mathfrak{V}_1 - n\cdot\dfrac{d\varphi_1}{dy} = -4\pi . v_1, \\ \Delta \mathfrak{W}_1 - n\cdot\dfrac{d\varphi_1}{dz} = -4\pi . w_1. \end{cases}$$

Im ganzen Raume:

$$(12^c.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{U}}{dx}+\dfrac{d\mathfrak{V}}{dy}+\dfrac{d\mathfrak{W}}{dz} = 0, \\ \dfrac{d\mathfrak{U}_1}{dx}+\dfrac{d\mathfrak{V}_1}{dy}+\dfrac{d\mathfrak{W}_1}{dz} = 0. \end{cases}$$

An den mit Elektricität belegten Flächen:

$$(12^d.)\quad \mathfrak{U}-\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{V}-\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{W}-\mathfrak{W}_1 = \varphi-\varphi_1 = 0,$$

$$(12^e.)\quad \frac{d\mathfrak{U}}{dN}-\frac{d\mathfrak{U}_1}{dN} = \frac{d\mathfrak{V}}{dN}-\frac{d\mathfrak{V}_1}{dN} = \frac{d\mathfrak{W}}{dN}-\frac{d\mathfrak{W}_1}{dN} = 0.$$

In unendlicher Entfernung

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{V} = \mathfrak{W} = \varphi = \Psi = 0.$$

In diesem ganzen Systeme von Gleichungen kommt $k$ nur noch als Factor der Function $\Psi$ in den Gleichungen ($12^a.$) vor. Wir werden also zu untersuchen haben, wann diese $k$ enthaltenden Glieder merklichen Einfluss auf die Lösung der Aufgabe erhalten können, wann nicht.

Mit Berücksichtigung der Gleichungen ($2^d.$) und ($12^c.$) folgt aus denen ($12^a.$)

$$(12^f.)\quad 0 = \left(\frac{n\varkappa}{4\pi}+1\right)\Delta\varphi - A^2 k n^2 \varphi,$$

und ein partikuläres Integral dieser Gleichung ist

$$(12^g.)\quad \varphi = \frac{B}{\varrho} e^{l\varrho+nt},$$

wo $\varrho^2 = x^2+y^2+z^2$ ist, und

$$(12^{g*}.)\quad l^2 = \frac{4\pi A^2 kn^2}{\varkappa n+4\pi}.$$

Bei wechselnden Werthen von $\varkappa$ erreicht der Modulus von $l$ seinen höchsten Werth, wenn $\varkappa = 0$. Dann wird

$$l = nA\sqrt{k}$$

und also bei imaginärem $n$ die Grösse $\dfrac{1}{A\sqrt{k}}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der durch die Gleichung ($12^g.$) dargestellten Wellen. Wenn $\varkappa$ nicht gleich Null ist, ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner und die Fortpflanzung

mit Absorption der Wellen verbunden. Uebrigens ist $\varkappa n$ gegen $4\pi$ verschwindend klein im Kupfer, selbst, wenn die Schwingungsperiode ein Milliontheil einer Secunde ist.

Wenn wir nun die letzten beiden Glieder in jeder der Gleichungen ($12^a$.) der Grösse nach vergleichen, so ist

$$(12^h.)\qquad \frac{d\varphi}{dx} = -\int E\cdot\frac{x-\xi}{r^3}\cdot d\xi\,.\,d\eta\,.\,d\zeta,$$

$$(12^i.)\qquad \frac{A^2kn}{4\pi+\varkappa n}\cdot 2\pi\frac{d\Psi}{dx} = \tfrac{1}{2}\int E\cdot\frac{x-\xi}{r^3}\cdot l^2\,.\,r^2\,.\,d\xi\,.\,d\eta\,.\,d\zeta.$$

So oft nun $\frac{1}{2}l^2r^2$ für diejenigen Werthe von $r$, welche zwischen den Punkten $x$, $y$, $z$ des Körpers und den Orten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ der beweglichen elektrischen Massen vorkommen, verschwindend klein ist, wird im Allgemeinen auch der mit $k$ multiplicirte Ausdruck verschwindend klein gegen die Differentialquotienten von $\varphi$ sein, zu denen er summirt ist.

Es ist aber $\frac{l}{2\pi}$ die Wellenlänge der Oscillationen, deren Schwingungsdauer $\frac{n}{2\pi}$ ist, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Oscillationen ist gleich der des Lichts, dividirt durch $\sqrt{k}$. Wenn also $k$ wie in Herrn *F. E. Neumanns* Annahme gleich Eins ist, oder wenigstens nicht unverhältnissmässig viel grösser als Eins, so *werden im Allgemeinen bei Versuchen an irdischen Leitern die Bewegungen der Elektricität nicht merklich anders ausfallen, als wenn* $k=0$ *wäre,* wenn nicht eben Dimensionen der Leiter benutzt und so kleine Zeittheile beobachtet werden können, dass sich die von der Lichtgeschwindigkeit herrührenden Unterschiede innerhalb dieser Dimensionen und Zeittheile geltend machen.

Diese Folgerung ist darauf gegründet, dass die in ($12^h$.) und ($12^i$.) ausgedrückten Grössen Summen sind von denselben Summanden, aber so, dass in der zweiten Summe jeder Summand mit einem verschwindend kleinen Factor multiplicirt ist, der bei imaginärem $n$ einen immer negativen reellen und einen der Regel nach dagegen verschwindenden imaginären Theil hat. Diese Folgerung würde nicht ohne Weiteres zulässig sein, wenn $\varphi$ die relativ kleine Differenz einer sehr grossen positiven und einer nahehin ebenso grossen negativen Quantität wäre, und dabei der mittlere Werth von $r^2$ für die eine dieser Quantitäten einen endlichen Unterschied von dem der andern angehörigen Mittelwerthe hätte. Nun kann allerdings $\varphi$ in der angegebenen Weise zusammengesetzt sein, aber dabei nur dann überall endlich bleiben, wenn zwei unendlich

grosse elektrische Quanta in unendlich kleiner Entfernung von einander als elektrische Doppelschicht von endlichem Momente gelagert sind, wie in den beiden Platten eines Condensators oder in den beiden Belegungen einer Leydener Flasche. In diesen Fällen ist aber offenbar die zweite Bedingung nicht erfüllt, nämlich die, dass der mittlere Werth von $r^2$ für die positive und negative elektrische Masse endlich verschieden sei.

In der Voraussetzung also, dass die Constante $k$ keine sehr grosse Zahl ist, wird man die analytische Behandlung der Aufgaben über Elektricitätsbewegung vereinfachen dürfen, indem man $k = 0$ setzt, oder die Fortpflanzung der Longitudinalwellen unendlich gross annimmt, so oft die Dimensionen der gebrauchten Leiter verschwindend klein sind gegen die Moduln der (reellen oder complexen) Wellenlängen der zur Wahrnehmung kommenden elektrischen Oscillationen (deren Periode auch complex sein kann).

Die Vereinfachung der analytischen Operationen, welche eintritt, wenn wir $k = 0$ setzen, gründet sich darauf, dass die Gleichungen (II.) und ($II^a$.) nicht mehr nach $t$ integrirt zu werden brauchen. Die Gleichung ($12^f$.) ergiebt alsdann für das Innere der Leiter entweder

$$n = -\frac{4\pi}{\varkappa}$$

oder

$$\Delta\varphi = 0.$$

Die letztere Alternative ergiebt, dass gar keine freie Elektricität im Innern der Leiter vorkommt. Die erstere giebt

$$\varphi = f_{x,y,z} \cdot e^{-\frac{4\pi}{\varkappa}t},$$

unabhängig von aller Einwirkung äusserer Kräfte. Bei denjenigen elektrischen Bewegungen also, die im Innern eines Leiters nach vorausgegangenem elektrischen Gleichgewicht durch äussere Kräfte hervorgerufen werden können, wird freie Elektricität, bei der Annahme $k = 0$, nur immer an der Oberfläche der Leiter oder an den Grenzflächen verschiedener Leiter vorkommen können.

## §. 7.

### Bewegung in einem unendlichen Cylinder.

Die einzige praktisch angewendete Form eines Leiters von hinreichend grossen Dimensionen, an der man hoffen könnte, Unterschiede, die der Lichtgeschwindigkeit entsprechen, zu entdecken, wäre die eines sehr langen Drahtes.

Ich will deshalb die Theorie der elektrischen Bewegung in einem solchen hier noch ausführen, basirt auf die Gleichungen ($12^a$.) bis ($12^f$.), indem, wie dort, die Abhängigkeit von $t$ auf einen Factor $e^{nt}$ beschränkt bleibe, und zugleich die Geschwindigkeiten $u_1$, $v_1$, $w_1$ im äusseren Raume gleich Null gesetzt werden:

$$(13.)\quad u_1 = v_1 = w_1 = 0.$$

Die Axe des Drahtes sei auch die Axe der $x$, der Draht cylindrisch mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius $R$. Die Bewegung geschehe theils in Richtung der $x$, theils in den darauf senkrechten Richtungen der

$$(13^a.)\quad \varrho = \sqrt{y^2+z^2}.$$

Wir können unter diesen Umständen setzen

$$(13^b.)\quad \begin{cases} \mathfrak{V} = \dfrac{d^2\chi}{dx.d\varrho}.\dfrac{y}{\varrho} = \dfrac{d^2\chi}{dx.dy}, \\ \mathfrak{W} = \dfrac{d^2\chi}{dx.d\varrho}.\dfrac{z}{\varrho} = \dfrac{d^2\chi}{dx.dz}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen ($12^a$.) fliessen die drei Gleichungen

$$(13^c.)\quad \begin{cases} \dfrac{\varkappa}{4\pi}.\Delta\left\{\dfrac{d\mathfrak{V}}{dz}-\dfrac{d\mathfrak{W}}{dy}\right\} - A^2.n.\left\{\dfrac{d\mathfrak{V}}{dz}-\dfrac{d\mathfrak{W}}{dy}\right\} = 0, \\ \dfrac{\varkappa}{4\pi}.\Delta\left\{\dfrac{d\mathfrak{W}}{dx}-\dfrac{d\mathfrak{U}}{dz}\right\} - A^2.n.\left\{\dfrac{d\mathfrak{W}}{dx}-\dfrac{d\mathfrak{U}}{dz}\right\} = 0, \\ \dfrac{\varkappa}{4\pi}.\Delta\left\{\dfrac{d\mathfrak{U}}{dy}-\dfrac{d\mathfrak{V}}{dx}\right\} - A^2.n.\left\{\dfrac{d\mathfrak{U}}{dy}-\dfrac{d\mathfrak{V}}{dx}\right\} = 0. \end{cases}$$

Die erste von diesen ist durch die Annahmen in ($13^b$.) erfüllt. Die beiden andern ergeben, dass die Differentialquotienten nach $y$ und $z$ genommen von folgendem Ausdrucke gleich Null sind

$$(13^{c*}.)\quad \frac{\varkappa}{4\pi}.\Delta\left\{\frac{d^2\chi}{dx^2}-\mathfrak{U}\right\} - A^2 n\left\{\frac{d^2\chi}{dx^2}-\mathfrak{U}\right\} = f_x,$$

und gleichzeitig giebt ($12^c$.)

$$\frac{d}{dx}\left\{\mathfrak{U}+\frac{d^2\chi}{dy^2}+\frac{d^2\chi}{dz^2}\right\} = 0$$

oder

$$\mathfrak{U}-\mathfrak{F}_{(\varrho)} = -\frac{d^2\chi}{dy^2}-\frac{d^2\chi}{dz^2} = -\frac{d^2\chi}{d\varrho^2}-\frac{1}{\varrho}.\frac{d\chi}{d\varrho}.$$

Da eine Function von $\varrho$ allein zu $\chi$ hinzugesetzt werden kann, ohne die Werthe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}_1$ zu ändern, so können wir die willkürliche Function $\mathfrak{F}_{(\varrho)}$ hier weglassen, ohne die Allgemeinheit der Integration zu beschränken, und haben

$$(13^d.)\quad \mathfrak{U} = \frac{d^2\chi}{dx^2}-\Delta\chi.$$

Wir erhalten dann für die Function $\chi$ aus ($13^{c*}$.) folgende Differentialgleichung:

$$(13^e.) \qquad \frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\Delta\Delta\chi - A^2 n\Delta\chi = 0.$$

Die dort stehende willkürliche Function $f(x)$ kann hier wiederum durch eine in $\chi$ einbegriffene Function von $x$ ersetzt gedacht werden, da die Hinzufügung einer solchen zu $\chi$ die Werthe von $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{W}$ nicht verändert.

Setzt man nun diese Werthe in die Gleichungen ($12^a$.) ein, so findet man, dass die drei Differentialquotienten, nach $x$, $y$ und $z$ genommen, der folgenden Gleichung gleich Null sind

$$(13^f.) \qquad \frac{\varkappa}{4\pi}\Delta\left(\frac{d\chi}{dx}\right) - A^2.n\cdot\frac{d\chi}{dx} = \left(1+\frac{\varkappa n}{4\pi}\right)\varphi - A^2\cdot\frac{kn}{2}\Psi + \text{Const.}$$

Folglich muss diese Gleichung ($13^f$.) erfüllt sein, und sie zusammen mit der Gleichung ($13^e$.) ersetzt die Gleichungen ($12^a$.). Führt man die Operation $\Delta$ an ($13^f$.) aus, so erhält man die Differentialgleichung für $\varphi$:

$$(13^g.) \qquad \left(1+\frac{\varkappa n}{4\pi}\right)\Delta\varphi - A^2.k.n^2.\varphi = 0.$$

Man kann auch im äusseren Raume die Functionen $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{W}_1$ auf die Form bringen:

$$(13^h.) \qquad \begin{cases} \mathfrak{U}_1 = \dfrac{d^2\chi_1}{dx^2} - \Delta\chi_1 = -\dfrac{d^2\chi_1}{d\varrho^2} - \dfrac{1}{\varrho}\cdot\dfrac{d\chi_1}{d\varrho}, \\ \mathfrak{B}_1 = \dfrac{d^2\chi_1}{dx.dy}, \\ \mathfrak{W}_1 = \dfrac{d^2\chi_1}{dx.dz}, \end{cases}$$

welche die Gleichung ($12^c$.) erfüllen.

Die Gleichungen ($12^b$.) und (13.) werden durch sie erfüllt, wenn man setzt:

$$(13^i.) \qquad \Delta\left(\frac{d\chi_1}{dx}\right) = n\varphi_1 = \tfrac{1}{2}\Delta\Psi_1$$

und

$$(13^k.) \qquad \Delta\Delta\left(\frac{d\chi_1}{dx}\right) = n.\Delta\varphi_1 = 0.$$

Daraus folgt, dass im äussern Raume sich $\frac{d\chi_1}{dx}$ und $\frac{1}{2}\Psi_1$ nur um eine Potentialfunction unterscheiden können, da die Gleichung ($13^i$.) sich auch schreiben lässt:

$$(13^l.) \qquad \Delta\left\{\frac{d\chi_1}{dx} - \tfrac{1}{2}\Psi_1\right\} = 0.$$

Wie wir oben schon angenommen haben, dass die Abhängigkeit der hier zu untersuchenden Functionen von $t$ darauf beschränkt sei, dass sie den Factor $e^{nt}$ enthalten, so fügen wir nun die weitere Beschränkung hinzu, dass ihre Abhängigkeit von $x$ dadurch gegeben sei, dass sie den Factor $e^{mx}$ enthalten, worin $m$ einen imaginären Werth haben soll. Imaginär muss $m$ sein, weil nur unter dieser Bedingung die in den Gleichungen ($1^a$.) oder ($1^b$.) gegebenen elektromotorischen Kräfte endlich sind.

Unter dieser Annahme werden die Bedingungsgleichungen unseres Problems folgende:

$$(14.)\qquad \frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\varDelta\varDelta\chi - A^2.n.\varDelta\chi = 0,$$

$$(14^a.)\qquad \varDelta\varDelta\chi_1 = \varDelta\varphi_1 = 0,$$

$$(14^b.)\qquad \frac{\varkappa m}{4\pi}\varDelta\chi - A^2.n.m\chi = \left(1+\frac{\varkappa n}{4\pi}\right)\varphi - \tfrac{1}{2}A^2.k.n.\varPsi,$$

$$(14^c.)\qquad 2m.\varDelta\chi_1 = \varDelta\varPsi_1 = 2n\varphi_1.$$

Dazu kommen noch die Grenzbedingungen für die Oberfläche des Cylinders, ($12^d$.) und ($12^e$.), welche sich reduciren auf folgende:

$$(14^d.)\qquad m^2\chi - \varDelta\chi = m^2\chi_1 - \varDelta\chi_1,$$

$$(14^e.)\qquad \frac{d\chi}{d\varrho} = \frac{d\chi_1}{d\varrho},$$

$$(14^f.)\qquad \varDelta\left(\frac{d\chi}{d\varrho}\right) = \varDelta\left(\frac{d\chi_1}{d\varrho}\right),$$

$$(14^g.)\qquad \varphi = \varphi_1,$$

$$(14^h.)\qquad \varPsi = \varPsi_1,$$

$$(14^i.)\qquad \frac{d\varPsi}{d\varrho} = \frac{d\varPsi_1}{d\varrho}.$$

Endlich für $\varrho = \infty$ müssen alle diese Functionen gleich Null werden.

Bezeichnen wir mit $J_{(p\varrho)}$ diejenige *Bessel*sche Function, welche für $\varrho = 0$ endlich bleibt und die Differentialgleichung erfüllt

$$(15.)\qquad \frac{d^2}{d\varrho^2}\cdot[J_{(p\varrho)}] + \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{d}{d\varrho}[J_{(p\varrho)}] + p^2 J_{(p\varrho)} = 0,$$

so ist

$$\varDelta[e^{mx}.J_{(p\varrho)}] = (m^2 - p^2).e^{mx}.J_{(p\varrho)},$$

und es wird also die Gleichung ($13^g$.) integrirt durch die Annahme

$$(15^a.)\qquad \varphi = \mathfrak{A}.e^{nt+mx}.J_{(p\varrho)},$$

wenn

$$(15^b.) \quad \left(1+\frac{\varkappa n}{4\pi}\right)(m^2-p^2) = A^2.k.n^2.$$

Bezeichnen wir dagegen mit $\mathfrak{J}_{(p\varrho)}$ dasjenige Integràl der Gleichung (15.), welches für $\varrho = \infty$ gleich Null wird, so ist im äusseren Raume mit Berücksichtigung von ($14^a$.) und ($14^g$.) zu setzen:

$$(15^c.) \quad \varphi_1 = \mathfrak{A}.e^{nt+mx}.\frac{J_{(pR)}}{\mathfrak{J}_{(mR)}}.\mathfrak{J}_{(m\varrho)}.$$

Die aus $\varphi$ zu bildende Function $\Psi$ ist dadurch bestimmt, dass im ganzen Raume

$$(15^d.) \quad \varDelta\Psi = 2n\varphi \quad \text{und} \quad \varDelta\Psi_1 = 2n\varphi_1,$$

sowie durch die Bedingungen für die Oberfläche ($14^h$.) und ($14^i$.). Danach wird im Innern des Cylinders $\Psi$ die Form haben:

$$(15^e.) \quad \Psi = \left\{\frac{2n}{m^2-p^2}.\mathfrak{A}.J_{(p\varrho)}+\mathfrak{E}.J_{(m\varrho)}\right\}.e^{nt+mx}$$

und im äusseren Raume

$$(15^f.) \quad \Psi_1 = \left\{-\frac{n\varrho}{m^2}.\mathfrak{A}.\frac{J_{(pR)}}{\mathfrak{J}_{(mR)}}.\mathfrak{J}'_{(m\varrho)}+\mathfrak{F}.\mathfrak{J}_{(m\varrho)}\right\}.e^{nt+mx}.$$

Aus der Differentialgleichung (15.) folgt leicht, wenn wir sie nach $p$ differentiiren, $p$ dann mit $m$ vertauschen, und zur Abkürzung setzen

$$\mathfrak{J}'_{(m\varrho)} = \frac{d}{d\varrho}.\mathfrak{J}_{(m\varrho)},$$

dass

$$\frac{d^2}{d\varrho^2}\left[\frac{\varrho}{m}.\mathfrak{J}'_{(m\varrho)}\right]+\frac{1}{\varrho}.\frac{d}{d\varrho}\left[\frac{\varrho}{m}.\mathfrak{J}'_{(m\varrho)}\right]+m^2.\left[\frac{\varrho}{m}.\mathfrak{J}'_{(m\varrho)}\right] = -2m.\mathfrak{J}_{(m\varrho)}$$

und somit ($15^d$.) erfüllt sei. Die Coefficienten $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ bestimmen sich durch die Gleichungen ($14^h$.) und ($14^i$.), welche ergeben:

$$(15^g.) \quad \begin{cases} \left[\frac{2n}{m^2-p^2}.J_{(pR)}+\frac{nR}{m^2}.J_{(pR)}.\frac{\mathfrak{J}'_{(mR)}}{\mathfrak{J}_{(mR)}}\right]\mathfrak{A}+\mathfrak{E}.J_{(mR)}-\mathfrak{F}.\mathfrak{J}_{(mR)} = 0, \\ \left[\frac{2n}{m^2-p^2}.J'_{(pR)}-nR.J_{(pR)}\right]\mathfrak{A}+\mathfrak{E}.J'_{(mR)}-\mathfrak{F}.\mathfrak{J}'_{(mR)} = 0. \end{cases}$$

---

Wir haben nun noch die Function $\chi$ zu bilden. Zunächst muss die Function $\varDelta\chi$ die Differentialgleichung (14.) erfüllen und dabei für $\varrho = 0$ endlich bleiben. Daraus folgt unter den vorausgeschickten Annahmen:

$$(16.) \quad \varDelta\chi = \mathfrak{B}.e^{nt+mx}.J_{(q\varrho)}$$

und

$$(16^a.) \qquad \frac{\varkappa}{4\pi}(m^2-q^2) = A^2.n.$$

Daraus folgt dann weiter, dass $\chi$ von der Form sein muss:

$$(16^b.) \qquad \chi = \left[\frac{1}{m^2-q^2}.\mathfrak{B}.J_{(q\varrho)}+\mathfrak{G}.J_{(m\varrho)}\right].e^{nt+mx},$$

wo $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{G}$ zwei constante Coefficienten sind. Der letztere bestimmt sich aus der Gleichung ($14^b$.), die sich bei Einsetzung der Werthe ($16^b$.), ($15^e$.) und ($15^a$.) reducirt auf

$$(16^c.) \qquad \mathfrak{G} = \frac{k}{2m}.\mathfrak{E}.$$

Im äusseren Raume muss die Function $\chi_1$ nach ($14^c$.) von der Form sein

$$(16^d.) \qquad \chi_1 = \frac{1}{2m}\Psi_1+\mathfrak{H}.e^{nt+mx}.\mathfrak{J}_{(m\varrho)}.$$

Die Coefficienten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ bestimmen sich durch die Grenzbedingungen ($14^d$.), ($14^e$.) und $14^f$.), nämlich

$$(16^e.) \qquad \begin{cases} \frac{q^2}{m^2-q^2}.\mathfrak{B}.J_{(qR)}+m^2.\mathfrak{G}.J_{(mR)} \\ = \frac{np^2}{m(m^2-p^2)}.\mathfrak{A}.J_{(pR)}+\frac{m}{2}.\mathfrak{E}.J_{(mR)}+m^2.\mathfrak{H}.\mathfrak{J}_{(mR)}, \\ \frac{1}{m^2-q^2}.\mathfrak{B}.J'_{(qR)}+\mathfrak{G}.J'_{(mR)} \\ = \frac{n}{m(m^2-p^2)}.\mathfrak{A}.J'_{(pR)}+\frac{1}{2m}.\mathfrak{E}.J'_{(mR)}+\mathfrak{H}.\mathfrak{J}'_{(mR)}, \\ \mathfrak{B}.J'_{(qR)} = \frac{n}{m}.\mathfrak{A}.J_{(pR)}.\frac{\mathfrak{J}'_{(mR)}}{\mathfrak{J}_{(mR)}}. \end{cases}$$

Die zwei Gleichungen ($15^g$.), die eine ($16^c$.) und die drei ($16^e$.) bilden ein System von sechs homogenen linearen Gleichungen mit den sechs Unbekannten

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{E},\ \mathfrak{F},\ \mathfrak{G},\ \mathfrak{H}.$$

Folglich muss die Determinante derselben gleich Null sein. Dies giebt schliesslich eine Gleichung, welche zur Bestimmung von $n$ dient. Zur Abkürzung setzen wir

$$(16^f.) \qquad P = \frac{J'_{(pR)}}{J_{(pR)}}, \qquad Q = \frac{J'_{(qR)}}{J_{(qR)}} \quad \text{und} \quad M = \frac{\mathfrak{J}'_{(mR)}}{\mathfrak{J}_{(mR)}}.$$

Dann ist die Eliminationsgleichung folgende:

$$(16^g.) \qquad \frac{q^2}{m^2-q^2}.\frac{M}{Q}[M-Q]-k.\frac{m^2}{m^2-p^2}[M-P]+\frac{1-k}{2}.R[M^2+m^2] = 0.$$

Die unbekannte Grösse $n$ ist hier in den $q$, $p$, $Q$ und $P$ enthalten. Es ist nun $\frac{2\pi}{im}$ gleich der Wellenlänge der betrachteten elektrischen Wellen nach der Länge des Drahtes gemessen; wir nehmen an, dass diese sehr gross gegen die Dicke des Drahtes sei, und betrachten deshalb $mR$ als eine Grösse, die gegen die Einheit verschwindet.

Ferner ist $\frac{2\pi}{\sqrt{m^2-p^2}}$ nach ($15^b$.) die Wellenlänge der longitudinalen elektrischen Wellen in einem ausgedehnten leitenden Medium, deren Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{n}$ ist; wir können deshalb auch $(m^2-p^2)R^2$ und $p^2R^2$ wie $m^2R^2$ als verschwindend klein gegen die Einheit betrachten. Dagegen ist

$$m^2-q^2 = \frac{4\pi n.A^2}{\varkappa},$$

und für Kupfer wird dies

$$m^2-q^2 = 4\pi n.\tfrac{1}{227000}\,\frac{\text{Secunden}}{\text{Quadratmillimeter}}.$$

Wenn also $R$ nicht unverhältnissmässig viel grösser als ein Millimeter ist, und $n$ nicht viele Tausende beträgt, so wird auch $(m^2-q^2)R^2$ und $q^2R^2$ als eine gegen die Einheit kleine Grösse betrachtet werden können.

Da nun

$$J_{(pR)} = 1-\frac{p^2.R^2}{2.2}+\frac{p^4.R^4}{2.2.4.4}-\text{etc.}$$

ist, so kann für sehr kleine Werthe von $pR$ und $qR$ gesetzt werden

$$P = -\tfrac{1}{2}p^2R,$$

$$\frac{q^2}{Q} = -\frac{2}{R}+q^2\frac{R}{4}.$$

Wenn wir diese Werthe in ($16^g$.) einsetzen, erhalten wir die für kleine Werthe von $pR$ und $qR$ zunächst noch ohne Einschränkung der Werthe von $mR$ gültige Gleichung:

$$(16^h.)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = -m^2\left[M+\frac{m^2R}{2}\right]+\frac{\varkappa n}{4\pi}\left[-\frac{2}{R}M^2\left(1-\frac{m^2R^2}{4}\right)-2Mm^2-\frac{m^4R}{2}\right] \\ +A^2n^2\left[M+\frac{R}{4}M^2+\frac{m^2R}{2}-\tfrac{1}{2}kRM^2\right]. \end{aligned}\right.$$

Es ist nun nach *Kirchhoff* *) zu setzen

$$\mathfrak{Z}_{(mR)} = J_{(mR)}\left[\Psi_0-\log\left(\frac{imR}{2}\right)\right]+\left\{-\frac{m^2R^2}{2.2}(1)+\frac{m^4R^4}{2.2.4.4}(1+\tfrac{1}{2})-\frac{m^6R^6(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}{2.2.4.4.6.6}+\text{etc.}\right\},$$

*) Dieses Journal Bd. XLVIII, Heft 4.

worin

$$\Psi_0 = -0{,}5772157.$$

Daraus geht hervor, dass wenn $mR$ sehr klein ist, auch $RM$ sehr klein ist, dagegen $\frac{M}{m}$ sehr gross. Mit Berücksichtigung hiervon können wir die Gleichung ($16^h$.) auf folgenden einfacheren Ausdruck bringen

$$(16^i.)\qquad 0 = -m^2 - \frac{\varkappa n}{2\pi R}\cdot M + A^2.n^2.\{1-\tfrac{1}{2}k.RM\}.$$

Wenn $k$ nicht so gross ist, dass $kRM$ endlich wird, verschwindet das letzte Glied mit $k$ ganz aus dieser Gleichung. Der Rest der Gleichung stimmt überein mit der Gleichung, welche Herr *Kirchhoff* aus dem *Weber*schen Gesetze abgeleitet hatte, wenigstens in Bezug auf die Glieder, welche allein Einfluss haben, wenn $R$ unendlich klein wird. Nur in den Gliedern, welche zunächst zu berücksichtigen sind, wenn $\log R$ nicht mehr als unendlich gross betrachtet werden kann, zeigt sich ein Unterschied, indem statt unserer Function

$$M = \frac{1}{R\left\{-\log\left(\frac{im}{2}\right)+\Psi_0-\log R\right\}}$$

in *Kirchhoffs* Gleichung steht:

$$\frac{1}{R\{\log l - \log R\}},$$

wo $l$ die Länge des Drahtes bezeichnet, und $\log l$ statt der in meiner Formel vorkommenden Grösse steht:

$$-\log\left(\frac{im}{2}\right)+\Psi_0 = -\log(\pi)+\Psi_0+\log(\lambda).$$

Im letzteren Ausdrucke bezeichnet $\lambda$ die Wellenlänge der betreffenden Oscillationen.

Zu bemerken ist noch, dass durch die Annahme, $kMR$ sei eine sehr kleine Grösse, das Vorkommen labiler Gleichgewichtsstörungen für negative Werthe von $k$ von vorn herein ausgeschlossen worden ist.

## §. 8.

### Einfluss dielektrischer und magnetischer Polarisation der Media.

Nachdem wir uns bisher mit der Frage beschäftigt haben, welchen Einfluss die aus den bisherigen Versuchen nicht bestimmbare Constante $k$ bei den elektrischen Bewegungen haben könne, bleibt es noch übrig, den Einfluss zu erörtern, den die zwischen den durchströmten Leitern liegenden und sie

umgebenden Isolatoren haben können. Wenn in ihnen Veränderungen vorgehen, so können diese auf die Ausbreitung der inducirenden Wirkungen Einfluss haben. Dass die meisten, vielleicht alle Naturkörper magnetisch (beziehlich diamagnetisch) polarisirbar sind, ist bekannt; für eine Reihe von Isolatoren ist auch nachgewiesen, dass in ihnen eine ähnliche Scheidung der Elektricitäten, *diëlektrische Polarisation,* stattfinden kann unter Einfluss elektrischer Kräfte, wie in magnetischen Körpern Scheidung der Magnetismen unter Einwirkung magnetischer Kräfte.

Es ist bekannt, dass man, wenigstens bei mässigeren Graden der Magnetisirung, das magnetische Moment, welches an irgend einer Stelle inducirt ist, der Stärke der an der betreffenden Stelle wirkenden magnetisirenden Kraft, diese multiplicirt mit einer von der Art des Stoffes abhängenden Constanten, gleich setzen kann. Die magnetisirende Kraft ist dabei diejenige, welche durch die äusseren Einflüsse in Verbindung mit dem in dem magnetisirten Körper selbst und an seiner Oberfläche entwickelten freien Magnetismus hervorgebracht wird. Genau dieselben Gesetze wenden wir auf die Diëlektrica an, wobei wir zunächst von den Vorgängen, die den elektrischen Rückstand der Leydener Flaschen hervorbringen, und die von der Anwesenheit schwach leitender Theile herzurühren scheinen, absehen.

Es seien $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Componenten der durch Vertheilung erzeugten elektrischen Momente parallel den Axen der $x, y, z$ genommen, $X$, $Y$, $Z$ die Componenten der gegebenen äusseren Kräfte, $\varphi$ die Potentialfunction der durch deren Wirkung vertheilten Elektricität, so setzen wir dem entsprechend

$$(17.)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = \varepsilon\left(X - \dfrac{d\varphi}{dx}\right), \\ \mathfrak{y} = \varepsilon\left(Y - \dfrac{d\varphi}{dy}\right), \\ \mathfrak{z} = \varepsilon\left(Z - \dfrac{d\varphi}{dz}\right). \end{cases}$$

Die Dichtigkeit freier Elektricität im Innern eines der Vertheilung unterworfenen Körpers, in zweierlei Weise ausgedrückt, ist gleich

$$(17^a.)\quad -\frac{d\mathfrak{x}}{dx} - \frac{d\mathfrak{y}}{dy} - \frac{d\mathfrak{z}}{dz} = -\frac{1}{4\pi}\cdot\Delta\varphi.$$

An einer Oberfläche, wo $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und $\varphi$ einen Sprung machen, ist mit Beibehaltung der bisher für die Oberflächen $\Omega$ gebrauchten Bezeichnungen

$$(17^b.)\quad (\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1)\cos a + (\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)\cos b + (\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)\cos c = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{d\varphi}{dN} - \frac{d\varphi_1}{dN}\right].$$

In Verbindung mit den Festsetzungen, welche den Werth von $\varphi$ im Unendlichen bestimmen, und das Vorhandensein äusserer elektrischer Massen betreffen, genügen diese Gleichungen zur Bestimmung von $\varphi$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$.

Sind die Kräfte $X$, $Y$ und $Z$ von der Form

$$X = -\frac{d\psi}{dx},$$

$$Y = -\frac{d\psi}{dy},$$

$$Z = -\frac{d\psi}{dz},$$

also gleich den Anziehungskräften einer mit der Dichtigkeit

$$E = -\frac{1}{4\pi} \cdot \Delta\psi$$

verbreiteten elektrischen Masse, so ergeben die Gleichungen (17.) und (17$^a$.) nach Elimination von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$:

$$(17^c.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx}\left\{(1+4\pi\varepsilon)\frac{d}{dx}(\varphi+\psi)\right\}+\frac{d}{dy}\left\{(1+4\pi\varepsilon)\frac{d}{dy}(\varphi+\psi)\right\}+\frac{d}{dz}\left\{(1+4\pi\varepsilon)\frac{d}{dz}(\varphi+\psi)\right\} \\ \qquad = -4\pi E, \end{array} \right.$$

und an den Grenzflächen, wo zwei Körper von verschiedenen Werthen von $\varepsilon$ zusammenstossen, wenn $E$ an der Fläche keine unendliche Dichtigkeit hat:

$$(17^d.)\qquad (1+4\pi\varepsilon)\frac{d}{dN}(\varphi+\psi) = (1+4\pi\varepsilon_1)\frac{d}{dN}(\varphi_1+\psi).$$

Ist $\varepsilon$ constant in dem Theile $S$ des Raumes, wo $E$ von Null verschieden ist, so ist

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta(\psi+\varphi) = \frac{1}{1+4\pi\varepsilon}\cdot E.$$

Das heisst, die gesammte Potentialfunction $(\psi+\varphi)$ wird in dem Raume, in welchem $E$ liegt, sich so verhalten, als wenn in einem nicht diëlektrischen Raume nur $\frac{E}{1+4\pi\varepsilon}$ läge. Durch die erfolgte Vertheilung wird die Quantität $\frac{-4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon}E$ dort hingeschoben, die einen entsprechenden Theil von $E$ neutralisirt.

Für die Verschiebungen von $E$ im Raume $S$, so weit $\varepsilon$ constant ist, bildet diese neutralisirende Elektricität kein Hinderniss, weil diese überall mitfolgen kann. Die Anziehungskräfte also, welche von anderweitig vorhandenen elektrischen Massen auf $E$ ausgeübt werden, müssen ebenso gross sein, als wenn die $E$ zum Theil neutralisirende Elektricität gar nicht vorhanden wäre.

Die Potentialfunction einer punktförmigen Masse $E_1$ ist also

$$\frac{E_1}{(1+4\pi\varepsilon)r}$$

und die Abstossung, welche sie auf die Masse $E$ ausübt:

$$\frac{E.E_1}{(1+4\pi\varepsilon)r^2}.$$

Die Grösse der Massen $E$ und $E_1$, elektrostatisch gemessen, erscheint also im Verhältniss $\sqrt{1+4\pi\varepsilon}:1$ verkleinert durch den Einfluss des Diëlektricum, in dem sie liegen.

Wenn wir nun unter $c$ eine beliebige constante Zahl verstehen, und jede Masse $E$ auf das $c$-fache vergrössert denken, jede Grösse $(1+4\pi\varepsilon)$ aber auf das $c^2$-fache, so bleibt die Anziehung der beiden Massen $E$ unter so veränderten Umständen unverändert, die Potentialfunction einer jeden wird verringert im Verhältniss $\frac{1}{c}$ und die Gleichung ($17^c$.), welche die Vertheilung bestimmt, bleibt vollständig ungeändert.

Wir können also durch alle *elektrostatischen* Messungen immer nur das Verhältniss der Werthe von $(1+4\pi\varepsilon)$ zwischen verschiedenen Körpern, oder zwischen diesen und dem vom Lichtäther gefüllten, übrigens leeren Raume ermitteln, aber nicht den absoluten Werth der genannten Grösse. Dasselbe gilt für die Coefficienten der magnetischen Induction. Dass *Poisson* und andere Bearbeiter der Theorie des Magnetismus den magnetischen Coefficienten, welcher der Grösse $(1+4\pi\varepsilon)$ entspricht, im Luftraume gleich Eins gesetzt haben, ist willkürlich. Es ist bekannt, dass eine Reihe von Physikern durch die diamagnetischen Erscheinungen veranlasst wurden, den betreffenden Coefficienten für den nur mit Lichtäther gefüllten Raum grösser als Eins zu setzen, um $\varepsilon$ in den diamagnetischen Körpern nicht negativ setzen zu müssen.

Die Bestimmung der elektrostatischen Einheit der Elektricität, wenn sie im Innern eines diëlektrischen Isolators vorgenommen wird, muss diese Einheit im Verhältniss $\sqrt{1+4\pi\varepsilon}:1$ zu gross ergeben, und ebenso auch die elektrostatische Einheit der Stromstärke in demselben Verhältniss zu gross. Die Constante $A^2$ ist der elektrodynamischen Anziehung zweier elektrostatischen Stromeinheiten proportional. Ist also das Medium, in dem wir uns befinden, und diese Versuche angestellt haben, diëlektrisch, so ist der wahre Werth der betreffenden Constante, wie er für einen absolut einflusslosen Raum gelten würde $\frac{A^2}{1+4\pi\varepsilon_0}$, wo $\varepsilon_0$ die diëlektrische Polarisationsconstante der Luft, beziehlich des den Weltraum füllenden Medium ist.

Wir müssen ferner die diëlektrische Polarisation auch bei der *Bestimmung der Bewegung der Elektricität* beachten.

Wenn in dem Volumenelement $dS$ die Menge $E$ positiver Elektricität sich um $\frac{1}{2}s$ in Richtung der positiven $x$, und die Menge negativer um $\frac{1}{2}s$ nach Richtung der negativen $x$ bewegt, so wird dadurch in demselben das elektrische Moment

$$\mathfrak{x} = E.s$$

hergestellt, und gleichzeitig ist dieser Vorgang entsprechend einer Strömung in dem Element

$$u_0.dt = E.s.$$

Der Act der Polarisation bildet also eine Art elektrischer Bewegung, bei welcher

$$u_0 = \frac{d\mathfrak{x}}{dt},$$

$$v_0 = \frac{d\mathfrak{y}}{dt},$$

$$w_0 = \frac{d\mathfrak{z}}{dt}.$$

Zu dieser kann sich noch hinzugesellen diejenige Bewegung, welche dem *Ohm*schen Gesetze entsprechend in leitenden Körpern geschieht, deren Componenten mit $u_2$, $v_2$ und $w_2$ bezeichnet werden mögen.

Da nun nach den in Gleichung (17.) gemachten Feststellungen, die die Elektricität in Richtung der Coordinatenaxen forttreibenden Kräfte gleich sind:

$$\frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{x},\quad \frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{y},\quad \frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{z},$$

so erhalten wir die Gleichungen:

$$(18.)\quad \begin{cases} \varkappa u_2 = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{x}, \\ \varkappa v_2 = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{y}, \\ \varkappa w_2 = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{z}, \end{cases}$$

und die Gesammtgeschwindigkeiten der elektrischen Strömung werden:

$$(18^a.)\quad \begin{cases} u = \frac{d\mathfrak{x}}{dt} + \frac{1}{\varepsilon.\varkappa}\cdot\mathfrak{x}, \\ v = \frac{d\mathfrak{y}}{dt} + \frac{1}{\varepsilon.\varkappa}\cdot\mathfrak{y}, \\ w = \frac{d\mathfrak{z}}{dt} + \frac{1}{\varepsilon.\varkappa}\cdot\mathfrak{z}. \end{cases}$$

In Bezug auf diese Grössen $u$ bleiben dann auch die Gleichungen (2.) und ($2^a$.) bestehen:

$$(2.)\qquad \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d\Delta\varphi}{dt},$$

$$(2^a.)\qquad (u-u_1).\cos a+(v-v_1).\cos b+(w-w_1).\cos c = \frac{1}{4\pi}\frac{d^2}{dt.dN}(\varphi-\varphi_1),$$

und die Berechnungen der elektrodynamischen Kräfte $U$, $V$, $W$, welche in den Gleichungen ($1^a$.) bis ($3^a$.) in §. 2 gegeben sind.

---

Nachdem so die elektrostatischen und elektrodynamischen Kräfte in einem diëlektrischen Medium bestimmt worden sind, haben wir noch festzustellen, wie die Induction zweier Stromleiter in einem magnetisch polarisirbaren Medium verändert wird. Ich bezeichne die magnetischen Momente mit $\lambda$, $\mu$, $\nu$ und die magnetische Potentialfunction mit $\chi$, die Polarisationsconstante mit $\vartheta$, die ausserdem vorhandenen magnetisirenden Kräfte mit $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, so ist, wie in Gleichung (17.), zu setzen

$$(19.)\qquad \begin{cases} \lambda = \vartheta\left[\mathfrak{L}-\frac{d\chi}{dx}\right], \\ \mu = \vartheta\left[\mathfrak{M}-\frac{d\chi}{dy}\right], \\ \nu = \vartheta\left[\mathfrak{N}-\frac{d\chi}{dz}\right], \end{cases}$$

und

$$(19^a.)\qquad \frac{d\lambda}{dx}+\frac{d\mu}{dy}+\frac{d\nu}{dz} = \frac{1}{4\pi}\cdot\Delta\chi,$$

oder an Flächen, welche freien Magnetismus enthalten:

$$(19^{a*}.)\qquad (\lambda-\lambda_1).\cos a+(\mu-\mu_1).\cos b+(\nu-\nu_1).\cos c = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{d\chi}{dN}-\frac{d\chi_1}{dN}\right].$$

Die magnetisirenden Kräfte $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ am Orte $x$, $y$, $z$, herrührend von den Stromcomponenten $u$, $v$, $w$ am Orte $\xi$, $\eta$, $\zeta$, sind die folgenden:

| Herrührend von der Strom-componente. | $\mathfrak{L}$ | $\mathfrak{M}$ | $\mathfrak{N}$ |
|---|---|---|---|
| $u$ | 0 | $-A\cdot u\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\right)$ | $A\cdot u\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r}\right)$ |
| $v$ | $A\cdot v\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\right)$ | 0 | $-A\cdot v\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right)$ |
| $w$ | $-A\cdot w\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r}\right)$ | $A\cdot w\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right)$ | 0 |

Also, wenn man sie für die sämmtlichen vorhandenen Strömungen berechnet,

$$(19^b.)\quad \begin{cases} \mathfrak{L} = A\left[\frac{dV}{dz}-\frac{dW}{dy}\right], \\ \mathfrak{M} = A\left[\frac{dW}{dx}-\frac{dU}{dz}\right], \\ \mathfrak{N} = A\left[\frac{dU}{dy}-\frac{dV}{dx}\right]. \end{cases}$$

Somit sind, wenn $u$, $v$, $w$ bekannt sind, die Grössen $\lambda$, $\mu$, $\nu$ durch die Gleichungen (19.), ($19^a$.), ($19^b$.) gegeben.

Die inducirende Wirkung der Grössen $\lambda$, $\mu$, $\nu$ im Element $dx.dy.dz$ dagegen auf die Stromelemente $u$, $v$, $w$ in $\xi$, $\eta$, $\zeta$ ist proportional der Zunahme des Potentials:

| Für Strom-componente. | Inductionskraft. |
|---|---|
| $u$ | $-A\cdot\frac{d}{dt}\left[\nu\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r}\right)-\mu\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dx.dy.dz$ |
| $v$ | $-A\cdot\frac{d}{dt}\left[\lambda\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\right)-\nu\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dx.dy.dz$ |
| $w$ | $-A\cdot\frac{d}{dt}\left[\mu\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right)-\lambda\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dx.dy.dz.$ |

Also wenn wir setzen:

$$(19^c.)\quad \begin{cases} L = \iiint \frac{\lambda}{r} \cdot d\xi . d\eta . d\zeta, \\ M = \iiint \frac{\mu}{r} \cdot d\xi . d\eta . d\zeta, \\ N = \iiint \frac{\nu}{r} \cdot d\xi . d\eta . d\zeta, \end{cases}$$

so sind die Componenten der elektromotorischen Kraft, die von der Magnetisirung des Medium herrührt:

$$(19^d.)\quad \begin{cases} +A \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}\right], \\ +A \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}\right], \\ +A \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}\right], \end{cases}$$

und aus den Gleichungen (17.) folgen endlich folgende Bewegungsgleichungen der Elektricität, in denen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die durch andere, z. B. hydroëlektrische und thermoëlektrische Processe bedingten äusseren Kräfte bedeuten:

$$(19^e.)\quad \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \mathfrak{x} = -\frac{d\varphi}{dx} - A^2 \cdot \frac{dU}{dt} + A \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}\right] + \mathfrak{X}, \\ \frac{1}{\varepsilon} \cdot \mathfrak{y} = -\frac{d\varphi}{dy} - A^2 \cdot \frac{dV}{dt} + A \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}\right] + \mathfrak{Y}, \\ \frac{1}{\varepsilon} \cdot \mathfrak{z} = -\frac{d\varphi}{dz} - A^2 \cdot \frac{dW}{dt} + A \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}\right] + \mathfrak{Z}, \end{cases}$$

wozu noch aus (19.) und ($19^b$.) kommen:

$$(19^f.)\quad \begin{cases} \frac{\lambda}{\vartheta} = A\left[\frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy}\right] - \frac{d\chi}{dx}, \\ \frac{\mu}{\vartheta} = A\left[\frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz}\right] - \frac{d\chi}{dy}, \\ \frac{\nu}{\vartheta} = A\left[\frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx}\right] - \frac{d\chi}{dz}; \end{cases}$$

endlich, wenn wir mit $E$ die freie Elektricität bezeichnen:

$$(19^g.)\quad -\frac{dE}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

Kennt man von den veränderlichen Grössen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $E$ durch den ganzen Raum, so ist aus den drei ersten $u$, $v$, $w$ mittels der Gleichungen ($18^a$.) zu finden, der freie Magnetismus durch ($19^a$.), und es sind alsdann $\varphi$, $\chi$, $U$, $V$, $W$, $L$, $M$, $N$ durch Quadraturen zu berechnen, so dass die sieben vorstehenden

Gleichungen ($19^e.$), ($19^g.$) und ($19^f.$) zur Bestimmung der vorgenannten sieben Unbekannten als Functionen der Zeit dienen können.

---

Um aus diesen Gleichungen die Integrale zu entfernen, und sie in reine Differentialgleichungen zu verwandeln, erinnere ich an folgende Sätze:

Wenn man drei Functionen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ von $x$, $y$, $z$ hat, und für alle Orte innerhalb eines gewissen einfach zusammenhängenden Raumes $S$ die drei Gleichungen erfüllt sein sollen:

$$(20.)\qquad \xi = 0,\qquad \eta = 0,\qquad \zeta = 0,$$

so folgt daraus, dass innerhalb des Raumes $S$ sei

$$(20^a.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\eta}{dz} - \dfrac{d\zeta}{dy} = 0, \\ \dfrac{d\zeta}{dx} - \dfrac{d\xi}{dz} = 0, \\ \dfrac{d\xi}{dy} - \dfrac{d\eta}{dx} = 0, \\ \dfrac{d\xi}{dx} + \dfrac{d\eta}{dy} + \dfrac{d\zeta}{dz} = 0. \end{cases}$$

Es lässt sich nun zeigen, dass das System der Gleichungen ($20^a.$) das System der Gleichungen (20.) vollständig ersetzt, wenn die Bedingungen hinzugefügt werden,

1) dass $\xi$, $\eta$, $\zeta$ im ganzen Raume $S$ endlich und stetig seien,

2) dass an der Oberfläche von $S$ sei

$$(20^b.)\qquad \xi.\cos a + \eta.\cos b + \zeta.\cos c = 0,$$

wo $a$, $b$, $c$ die Winkel sind, welche die Normale $N$ der Oberfläche von $S$ mit den Coordinatenaxen macht.

Aus den ersten drei Gleichungen des Systems ($20^a.$) folgt nämlich direct, dass es eine Function $\Psi$ von $x$, $y$, $z$ geben müsse, von der Beschaffenheit, dass

$$\xi = \frac{d\Psi}{dx},\qquad \eta = \frac{d\Psi}{dy},\qquad \zeta = \frac{d\Psi}{dz}.$$

Dann ergiebt die letzte der Gleichungen ($20^a.$)

$$\Delta\Psi = 0,$$

und die Gleichung ($20^b.$), dass an der ganzen Oberfläche des Raumes $S$

$$\frac{d\Psi}{dN} = 0.$$

Da der Raum $S$ der Voraussetzung nach einfach zusammenhängend, und die Grössen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ überall endlich und stetig sein sollen, so genügen diese Bedingungen nach bekannten Gesetzen über die Potentialfunctionen, um zu zeigen, dass im ganzen Raume $S$

$$\Psi = \text{Const.},$$

$$(20.) \qquad \xi = \eta = \zeta = 0.$$

---

Wenden wir diese Sätze auf das System der Gleichungen ($19^e$.), und dann auch auf das der Gleichungen ($19^f$.) an, betrachten wir dabei den unendlichen Raum als den Raum $S$, und berücksichtigen wir, dass aus ($19^c$.), ($19^a$.) und ($19^{a*}$.) folgt:

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = -\chi,$$

so erhalten wir folgende Systeme von Gleichungen:

$$(20^c.) \quad \begin{cases} \frac{d}{dy}\left(\frac{\mathfrak{z}}{\varepsilon}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\varepsilon}\right) = \frac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta} \cdot A \cdot \frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dy} - \frac{d\mathfrak{Y}}{dz}, \\ \frac{d}{dz}\left(\frac{\mathfrak{x}}{\varepsilon}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\mathfrak{z}}{\varepsilon}\right) = \frac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta} \cdot A \cdot \frac{d\mu}{dt} + \frac{d\mathfrak{X}}{dz} - \frac{d\mathfrak{Z}}{dx}, \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\varepsilon}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\mathfrak{x}}{\varepsilon}\right) = \frac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta} \cdot A \cdot \frac{d\nu}{dt} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dx} - \frac{d\mathfrak{X}}{dy}, \end{cases}$$

$$(20^d.) \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\mathfrak{x}}{\varepsilon}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\varepsilon}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{\mathfrak{z}}{\varepsilon}\right) = -\Delta\varphi + A^2 \cdot k \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz},$$

$$(20^e.) \quad \begin{cases} \frac{d}{dy}\left(\frac{\nu}{\vartheta}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{\mu}{\vartheta}\right) = A \cdot \left[\frac{d^2\varphi}{dx.dt} - 4\pi \cdot \frac{d\mathfrak{x}}{dt} - \frac{4\pi}{\varkappa\varepsilon} \cdot \mathfrak{x}\right], \\ \frac{d}{dz}\left(\frac{\lambda}{\vartheta}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\nu}{\vartheta}\right) = A \cdot \left[\frac{d^2\varphi}{dy.dt} - 4\pi \cdot \frac{d\mathfrak{y}}{dt} - \frac{4\pi}{\varkappa\varepsilon} \cdot \mathfrak{y}\right], \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\mu}{\vartheta}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\lambda}{\vartheta}\right) = A \cdot \left[\frac{d^2\varphi}{dz.dt} - 4\pi \cdot \frac{d\mathfrak{z}}{dt} - \frac{4\pi}{\varkappa\varepsilon} \cdot \mathfrak{z}\right], \end{cases}$$

$$(20^f.) \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda}{\vartheta}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\vartheta}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{\mathfrak{z}}{\vartheta}\right) = -\Delta\chi.$$

Dazu kommen noch die Bedingungen für die unendlich entfernte Grenzfläche des Raumes:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{z} = \lambda = \mu = \nu = \varphi = \chi = 0.$$

Ferner die Bedingung, dass die in ($19^e$.) und ($19^f$.) gleich Null gesetzten Grössen überall stetig und endlich seien. Da nun dies für die Grössen $U$, $V$, $W$, $L$, $M$, $N$ und ihre Differentialquotienten schon nach der für sie vor-

geschriebenen Bildungsweise durch Integration der Fall ist, so oft $u$, $v$, $w$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ überall endlich sind, so reduciren sich die Bedingungen der Stetigkeit darauf, dass die sechs Grössen:

$$\frac{\mathfrak{x}}{\varepsilon}+\frac{d\varphi}{dx}-\mathfrak{X}, \quad \frac{\lambda}{\vartheta}+\frac{d\chi}{dx},$$
$$\frac{\mathfrak{y}}{\varepsilon}+\frac{d\varphi}{dy}-\mathfrak{Y}, \quad \frac{\mu}{\vartheta}+\frac{d\chi}{dy},$$
$$\frac{\mathfrak{z}}{\varepsilon}+\frac{d\varphi}{dz}-\mathfrak{Z}, \quad \frac{\nu}{\vartheta}+\frac{d\chi}{dz}$$

überall stetig seien, namentlich auch an solchen Flächen, wo $\varepsilon$, $\vartheta$ und $\varkappa$ unstetig sind.

Da $\chi$ an solchen Flächen stetig ist, so ist

$$\frac{d}{dx}(\chi-\chi_1) = \cos a\frac{d}{dN}(\chi-\chi_1)$$
u. s. w.

Wir haben ferner nach der Gleichung ($19^{a*}$.)

$$(20^g.) \quad (\lambda-\lambda_1).\cos a+(\mu-\mu_1).\cos b+(\nu-\nu_1).\cos c = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dN}(\chi-\chi_1)$$

und nach den Stetigkeitsbedingungen somit

$$(20^h.) \quad \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\vartheta}-\dfrac{\lambda_1}{\vartheta_1} = -\dfrac{1}{4\pi}\cdot\cos a\cdot\dfrac{d}{dN}(\chi-\chi_1), \\ \dfrac{\mu}{\vartheta}-\dfrac{\mu_1}{\vartheta_1} = -\dfrac{1}{4\pi}\cdot\cos b\cdot\dfrac{d}{dN}(\chi-\chi_1), \\ \dfrac{\nu}{\vartheta}-\dfrac{\nu_1}{\vartheta_1} = -\dfrac{1}{4\pi}\cdot\cos c\cdot\dfrac{d}{dN}(\chi-\chi_1). \end{cases}$$

Aus den Gleichungen ($20^g$.) und ($20^h$.) kann $\chi-\chi_1$ unmittnlbar eliminirt werden. Dann kommt $\chi$ nur noch in der Gleichung ($20^f$.) vor. Es können also aus den Gleichungen ($20^c$.), ($20^d$.), ($20^e$.) und den Stetigkeitsbedingungen die anderen unbekannten Grössen bestimmt werden, ohne auf $\chi$ Rücksicht zu nehmen.

Sind die Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ an der betreffenden Fläche stetig, oder ist nur ihre senkrecht zur Fläche gerichtete Resultante $\mathfrak{P}$ unstetig, so erhalten wir für die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ein ähnliches System von Gleichungen:

$$(20^i.) \quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{x}}{\varepsilon}-\dfrac{\mathfrak{x}_1}{\varepsilon_1} = -\dfrac{1}{4\pi}\cdot\cos a\left[\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_1+\dfrac{d}{dN}(\varphi-\varphi_1)\right], \\ \dfrac{\mathfrak{y}}{\varepsilon}-\dfrac{\mathfrak{y}_1}{\varepsilon_1} = -\dfrac{1}{4\pi}\cdot\cos b\left[\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_1+\dfrac{d}{dN}(\varphi-\varphi_1)\right], \\ \dfrac{\mathfrak{z}}{\varepsilon}-\dfrac{\mathfrak{z}_1}{\varepsilon_1} = -\dfrac{1}{4\pi}\cdot\cos c\left[\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_1+\dfrac{d}{dN}(\varphi-\varphi_1)\right]. \end{cases}$$

Dass die Gleichungen ($20^c$.) bis ($20^i$.) mit Ausschluss von ($20^f$.) die Lösung eindeutig bestimmen, wenn $k$ nicht negativ ist, ergiebt sich aus der Gleichung der lebendigen Kraft, die wir deshalb hier zunächst aufstellen wollen.

Für den Fall, dass keine äusseren Kräfte wirken, also

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0,$$

erhält man die *Gleichung der lebendigen Kraft*, indem man die Gleichungen ($20^c$.) der Reihe nach mit $\frac{\lambda}{\vartheta}$, $\frac{\mu}{\vartheta}$, $\frac{\nu}{\vartheta}$ multiplicirt und addirt, dann ebenso die Gleichungen ($20^e$.) der Reihe nach mit $\frac{\mathfrak{x}}{\varepsilon}$, $\frac{\mathfrak{y}}{\varepsilon}$, $\frac{\mathfrak{z}}{\varepsilon}$ multiplicirt und addirt, die letztere Summe von der ersteren abzieht. Die Glieder der linken Seite lassen sich dann integriren, und ihr Integral wird wegen der Stetigkeitsbedingungen ($20^h$.) und ($20^i$.) gleich Null. Die Glieder der rechten Seite, welche $\varphi$ enthalten, können durch eine partielle Integration mit Rücksicht auf ($20^d$.) umgeformt werden, und man erhält endlich:

$$(20^k.) \quad \left\{ \begin{aligned} &\tfrac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \iiint \Big\{ \frac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta^2} \cdot [\lambda^2+\mu^2+\nu^2] + \frac{4\pi}{\varepsilon} [\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2] \\ &\qquad + \Big[\Big(\frac{d\varphi}{dx}\Big)^2 + \Big(\frac{d\varphi}{dy}\Big)^2 + \Big(\frac{d\varphi}{dz}\Big)^2\Big] + A^2 . k \cdot \Big(\frac{d\varphi}{dt}\Big)^2 \Big\} . dx . dy . dz \\ &= -\iiint \frac{4\pi}{\varkappa . \varepsilon^2} [\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2] . dx . dy . dz = -\iiint \varkappa \, [u_2^2+v_2^2+w_2^2] . dx . dy . dz. \end{aligned} \right.$$

Aus dieser Gleichung sind entsprechende Folgerungen, wie aus der früheren ($5^a$.) zu ziehen. Bezeichnen wir das Integral, dessen nach der Zeit genommener Differentialquotient die linke Seite der Gleichung ($20^h$.) bildet, mit $\Phi$, so ist $\Phi$ nothwendig immer positiv, wenn $k$ positiv ist. Sein Werth muss aber während des Ablaufs der Bewegung nothwendig immer kleiner werden. Ist derselbe Null, so muss er Null bleiben.

Daraus folgt, dass, wenn ausser den Kräften $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ die Anfangswerthe von

$$\mathfrak{x}, \ \mathfrak{y}, \ \mathfrak{z}, \ \lambda, \ \mu, \ \nu, \ \varphi, \ \frac{d\varphi}{dt}$$

durch den ganzen Raum gegeben sind, die Gleichungen ($20^c$.) bis ($20^i$.) die Bewegung eindeutig bestimmen.

Ist $k = 0$, so fällt $\frac{d\varphi}{dt}$ aus diesen Bestimmungsstücken weg.

Um die Art der durch diese Gleichungen angezeigten Bewegungszustände anschaulicher zu machen, wollen wir sie auf einen Körper $S$ anwenden, in dessen Innerem $\varepsilon$ und $\vartheta$ constant sind und $\varkappa = \infty$ ist; ferner $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0$.

Wir erhalten dann:

$$(21.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{z}}{dy}-\dfrac{d\mathfrak{y}}{dz} = A.\varepsilon.\dfrac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta}.\dfrac{d\lambda}{dt}, \\ \dfrac{d\mathfrak{x}}{dz}-\dfrac{d\mathfrak{z}}{dx} = A.\varepsilon.\dfrac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta}.\dfrac{d\mu}{dt}, \\ \dfrac{d\mathfrak{y}}{dx}-\dfrac{d\mathfrak{x}}{dy} = A.\varepsilon.\dfrac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta}.\dfrac{d\nu}{dt}. \end{cases}$$

$$(21^a.)\quad \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{d\mathfrak{x}}{dx}+\frac{d\mathfrak{y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{z}}{dz}\right] = -\Delta\varphi+A^2.k.\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

$$(21^b.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\nu}{dy}-\dfrac{d\mu}{dz} = A.\vartheta.\left[\dfrac{d^2\varphi}{dx.dt}-4\pi.\dfrac{d\mathfrak{x}}{dt}\right], \\ \dfrac{d\lambda}{dz}-\dfrac{d\nu}{dx} = A.\vartheta.\left[\dfrac{d^2\varphi}{dy.dt}-4\pi.\dfrac{d\mathfrak{y}}{dt}\right], \\ \dfrac{d\mu}{dx}-\dfrac{d\lambda}{dy} = A.\vartheta.\left[\dfrac{d^2\varphi}{dz.dt}-4\pi.\dfrac{d\mathfrak{z}}{dt}\right]. \end{cases}$$

Wenn wir aus (21.) neue Gleichungen bilden, nach der Weise wie ($20^a$.) aus (20.) gebildet ist, so erhalten wir

$$(21^c.)\quad \begin{cases} \Delta\mathfrak{x} = \\ 4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)A^2\dfrac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}+\left[1-\dfrac{(1+4\pi\vartheta)(1+4\pi\varepsilon)}{k}\right]\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{d\mathfrak{x}}{dx}+\dfrac{d\mathfrak{y}}{dy}+\dfrac{d\mathfrak{z}}{dz}\right] \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Die entsprechenden Gleichungen für $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ erhält man, indem man in ($21^c$.) $\mathfrak{x}$ und $x$ beziehlich mit $\mathfrak{y}$ und $y$, oder mit $\mathfrak{z}$ und $z$ vertauscht.

In ähnlicher Weise erhält man für die magnetischen Momente:

$$(21^d.)\quad \begin{cases} \Delta\lambda = 4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)A^2.\dfrac{d^2\lambda}{dt^2}, \\ \Delta\mu = 4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)A^2.\dfrac{d^2\mu}{dt^2}, \\ \Delta\nu = 4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)A^2.\dfrac{d^2\nu}{dt^2}, \end{cases}$$

$$\frac{d\lambda}{dx}+\frac{d\mu}{dy}+\frac{d\nu}{dz} = 0.$$

In den Gleichungen ($21^c$.) sind die elektrischen Verschiebungen in einem diëlektrischen Isolator durch ganz dieselben Gleichungen gegeben, wie die Verschiebungen der wägbaren Theilchen in einem festen elastischen Körper,

in welchem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit beträgt

für die Transversalwellen: $\dfrac{1}{A\sqrt{4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)}}$,

für die Longitudinalwellen: $\dfrac{1}{A}\sqrt{\dfrac{1+4\pi\varepsilon}{4\pi\varepsilon.k}}$.

Die Gleichungen ($21^d$.) dagegen für die magnetischen Verschiebungen entsprechen denen im Innern eines incompressiblen elastischen Körpers, in welchem die Geschwindigkeit der Transversalwellen dieselbe ist, wie die angegebene der elektrischen Verschiebungen, die Geschwindigkeit der longitudinalen Schwingungen dagegen unendlich gross. Es ergeben diese Gleichungen, wie schon Herr *Maxwell* für den von ihm behandelten Grenzfall ($k=0$, $\varepsilon$ und $\vartheta$ unendlich gross) gezeigt hat, dass bei den Transversalwellen die elektrische Oscillation in der einen Polarisationsebene, die magnetische in der darauf senkrechten geschieht.

Um zu ermitteln, was unter Annahme eines diëlektrischen Raumes der gemessene Werth der Constante $A$ bedeute, müssen wir noch den Fall der gut leitenden Körper untersuchen, wenn $\varkappa$ so klein ist, dass die durch die Polarisation entstehende Geschwindigkeit $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$ gegen die von der Leitung abhängende $\frac{\mathfrak{x}}{\varkappa\varepsilon}$ verschwindet. Unter dieser Annahme ergeben die Gleichungen ($20^c$.) bis ($20^e$.) bei eben solcher Behandlung, wie für den Isolator

$$\varkappa\Delta u = (1+4\pi\vartheta)\,4\pi A^2\frac{du}{dt} - \frac{d}{dx}\left\{\Delta\varphi + (1+4\pi\vartheta-k)\,A^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right\}$$

etc.

Die beiden andern erhält man, indem man $u$ und $x$ mit $v$ und $y$, oder mit $w$ und $z$ vertauscht.

Vergleicht man diese mit denen, welche durch die Operation $\Delta$ aus ($3^b$.) gebildet werden:

$$\varkappa\Delta u = 4\pi A^2\frac{du}{dt} - \frac{d}{dx}\left\{\Delta\varphi + (1-k)\,A^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right\}$$

etc.

so sieht man, dass nur die Constanten verschieden sind. Statt $A^2$ der letzteren steht in der ersten $A^2(1+4\pi\vartheta)$, und statt $k$ der letzteren steht

$$\frac{k}{1+4\pi\vartheta}$$

in der ersteren. ***Ist also das Medium magnetisirbar, so erscheint der Werth der Constante k darin verkleinert in dem angegebenen Verhältniss.***

Andererseits erscheint die Constante $A^2$, wenn in einem magnetisirbaren Medium experimentirt wird, vergrössert durch ihre Multiplication mit dem Factor $(1+4\pi\vartheta)$. Da wir nun durch alle statischen Versuche über magnetische Vertheilung nur immer das Verhältniss der Werthe von $(1+4\pi\vartheta)$ für verschiedene Stoffe zu einander, oder zu dem nur mit Lichtäther gefüllten sogenannten Vacuum ermitteln können, so finden wir durch Versuche im Luftraum oder Vacuum immer nur das Product der Constante $A^2$ mit dem Factor $(1+4\pi\vartheta_0)$, wenn wir mit $\vartheta_0$ den unbekannten Werth dieses Coefficienten für den Luftraum bezeichnen.

Ferner ist schon oben nachgewiesen worden, dass die Quantitäten Elektricität, welche strömen, nach elektrostatischen Einheiten bestimmt im Verhältniss $\sqrt{1+4\pi\varepsilon_0}:1$ verkleinert erscheinen, und ebenso alle nach elektrostatischer Einheit gemessenen Stromeinheiten. Dagegen erscheint der Widerstand $\varkappa$ im Verhältniss $1:(1+4\pi\varepsilon_0)$ vergrössert und ebenso die Constante $A^2$. Ist also $\mathfrak{A}$ der im Luftraum gefundene, der Lichtgeschwindigkeit nahe gleiche Werth von $\frac{1}{A}$, so ist der wahre Werth

$$\frac{1}{A} = \mathfrak{A}\sqrt{1+4\pi\varepsilon_0}\,.\,\sqrt{1+4\pi\vartheta_0},$$

und der Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in einem isolirenden Medium wird

$$\text{longitudinal:}\quad \mathfrak{A}\sqrt{\frac{(1+4\pi\varepsilon)(1+4\pi\varepsilon_0)(1+4\pi\vartheta_0)}{4\pi\varepsilon k}},$$

$$\text{transversal:}\quad \mathfrak{A}\sqrt{\frac{(1+4\pi\varepsilon_0)(1+4\pi\vartheta_0)}{4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)}}.$$

In der Luft selbst werden diese Werthe:

$$\text{longitudinal:}\quad \mathfrak{A}(1+4\pi\varepsilon_0)\sqrt{\frac{1+4\pi\vartheta_0}{4\pi\varepsilon_0 k}},$$

$$\text{transversal:}\quad \mathfrak{A}\sqrt{\frac{1+4\pi\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}}.$$

Für die elektrodynamische Induction erweist es sich also nicht als gleichgiltig, wie es bei den elektrostatischen Phänomenen der Fall war, ob der Luftraum ein Diëlektricum ist oder nicht, sondern es hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der inducirenden Wirkung von der absoluten Grösse von $\varepsilon_0$ ab, und $\varepsilon_0$ würde durch experimentelle Bestimmung dieser Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Transversalwellen im Luftraum bestimmt werden können. Diese Geschwindigkeit müsste der vorliegenden Theorie nach

grösser sein, als die aus Herrn *W. Weber*s Versuchen bestimmte Geschwindigkeit $\mathfrak{A}$, und dieser nur gleich werden können, wenn die diëlektrische Polarisationsconstante der Luft $\varepsilon_0$ unendlich gross gegen $\frac{1}{4\pi}$ wäre. Es geht daraus hervor, dass die bisher vorliegenden Erfahrungen auch ohne wesentliche Aenderungen in den Grundzügen der acceptirten Theorie der Elektrodynamik eine Ausbreitung der elektrischen Fernwirkungen mit endlichen Geschwindigkeiten als möglich erscheinen lassen; und zwar würden sich die elektromagnetischen Wirkungen dabei mit einer der Lichtgeschwindigkeit gleichen oder grösseren Geschwindigkeit ausbreiten, während die Ausbreitung der elektrostatischen von der unbekannten Constante $k$ abhängig bliebe.

Heidelberg, 1870.

---

Corrigenda.

Seite 75, Zeile 4 v. o. statt $Ds$ lese man $D\sigma$.
- 80, - 1 v. u. - $\frac{2}{4k}$ - - $\frac{1}{4k}$.